2.4. Correspondance entre sous-cogèbres et sous-catégories de Com_C^f.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

b) Com^f_C *est semi-simple, et tout objet simple de* Com^f_C *est absolument simple.*

C'est trivial à partir du résultat analogue pour les algèbres.

[Noter que ce résultat s'applique notamment à la bigèbre d'un groupe réductif déployé sur K, lorsque $\mathrm{car}(K) = 0$. Mais, bien entendu, il ne donne que la structure de *cogèbre* de la bigèbre en question, pas sa structure d'algèbre.]

d) A tout $E \in \mathrm{Com}^f_C$ on peut associer un élément *trace* $\theta_E \in C$ de la manière suivante: E définit un morphisme de cogèbres

$$\mathrm{End}(E) \to C \quad (\text{cf. n° } 1.2)$$

et l'on prend l'image de 1_E dans C par ce morphisme. En termes d'une base (v_i) de E, et des $c_{ij} \in C$ correspondants *(loc. cit.)*, on a $\theta_E = \sum_i c_{ii}$.

[Voici encore une autre définition: si l'on regarde E comme module sur l'algèbre C'_E duale de C_E, on a $C'_E \subset \mathrm{End}(E)$, et la forme $u \mapsto \mathrm{Tr}(u)$, étant une forme linéaire sur C'_E, s'identifie à un élément de C_E qui n'est autre que θ_E.]

PROPOSITION 4. *Supposons K de caractéristique 0. Soient E_1 et E_2 deux comodules de rang fini, et soient $\theta_1, \theta_2 \in C$ les traces correspondantes. On a $\theta_1 = \theta_2$ si et seulement si les quotients de Jordan-Hölder de E_1 et E_2 coïncident* (avec leurs mutiplicités).

En effet, le résultat dual (pour les modules de rang fini sur une algèbre) est bien connu (*Alg.* VIII).

COROLLAIRE. *Si E_1 et E_2 sont semi-simples, on a $\theta_1 = \theta_2$ si et seulement si E_1 et E_2 sont isomorphes.*

Remarques

1) On peut aussi donner des résultats lorsque $\mathrm{car}(K) \neq 0$. Par exemple, si les E_α sont des comodules absolument simples deux à deux non isomorphes, les θ_α correspondants sont linéairement indépendants sur K.

2) Les résultats précédents s'appliquent notamment aux *représentations linéaires* d'un schéma en groupes (ou en monoïdes) affine sur K.

2.4. CORRESPONDANCE ENTRE SOUS-COGÈBRES ET SOUS-CATÉGORIES DE Com^f_C.

Si D est une sous-cogèbre de C, on a déjà remarqué que tout D-comodule peut être considéré comme un C-comodule. On obtient ainsi un isomorphisme de Com^f_D sur une sous-catégorie abélienne $\tilde{D}$ de Com^f_C.

THÉORÈME 2. *L'application* $D \mapsto \tilde{D}$ *est une bijection de l'ensemble des sous-cogèbres de* C *sur l'ensemble des sous-catégories* L *de* Com^f_C *vérifiant les conditions suivantes:*

1) L *est pleine* (i.e. si $E, F \in L$, on a $\mathrm{Hom}^L(E,F) = \mathrm{Hom}^C(E,F)$),

2) L *est stable par sommes directes finies,*

3) *Tout objet de* Com^f_C *qui est isomorphe à un sous-objet, ou à un objet quotient, d'un objet de* L, *appartient à* L.

[On se permet d'écrire $E \in L$ à la place de $E \in \mathrm{ob}(L)$.]

Soit Θ l'ensemble des L vérifiant les conditions 1), 2), 3). Si $L \in \Theta$, il est clair que L est une catégorie abélienne ayant même sous-objets et mêmes objets quotients que Com^f_C. On notera $C(L)$ la sous-cogèbre de C somme des cogèbres C_E, pour $E \in L$. Le théorème va résulter des deux formules suivantes:

a) $C(\tilde{D}) = D$ pour toute sous-cogèbre D de C;

b) $C(L)^{\sim} = L$ pour toute $L \in \Theta$.

La première de ces deux formules est triviale: elle revient à dire que D est réunion des sous-cogèbres C_E, lorsque E parcourt l'ensemble (!) des D-comodules de rang fini, ce qui a été prouvé au n° 2.1. Pour la seconde, il suffit de prouver ceci:

LEMME 1. *Soit* E *un comodule de rang fini, soit* $C_E \subset C$ *la cogèbre correspondante, et soit* F *un* C_E*-comodule* (considéré comme C-comodule) *de rang fini. Il existe alors un entier* $n \geqslant 0$ *tel que* F *soit isomorphe à un sous-comodule d'un quotient de* E^n.

Par dualité, cela revient à dire que, si B est une algèbre de rang fini, et E un B-module fidèle, tout B-module de type fini F est isomorphe à un quotient d'un sous-module d'un E^n. Or F est isomorphe à un quotient d'un module libre B^q, et l'on est ramené à prouver que B^q est isomorphe à un sous-module d'un E^n; il suffit d'ailleurs de le faire pour $q = 1$. Mais c'est clair: si E est engendré par $x_1, \ldots, x_n$, l'application $b \mapsto (bx_1, \ldots, bx_n)$ est une injection de B dans E^n, puisque E est fidèle. D'où le lemme, et, avec lui, le théorème.

Remarques

1) Le lecteur peut à volonté interpréter Com^f_C comme une *petite* catégorie (relative à un univers fixé, par exemple), ou une *grosse*. Le th. 2 est correct dans l'une ou l'autre interprétation.

2) Il n'est pas indispensable de passer aux modules pour prouver le lemme 1. On remarque d'abord (cf. n° 1.4, Exemple 2) que F est isomorphe à un sous-comodule de $C_E \otimes F$, i.e. de $(C_E)^n$, avec $n = \operatorname{rang}(F)$. D'autre part, C_E est isomorphe, comme comodule, à un quotient de $E \otimes E'$, c'est-à-dire de E^m, où $m = \operatorname{rang}(E)$. D'où le résultat.

Exemples

1) La sous-catégorie de Com^f_C formée des *objets semi-simples* correspond à la *plus grande sous-cogèbre semi-simple* de C (la somme de toutes les sous-cogèbres simples).

2) Supposons C semi-simple, et soit $(E_i)_{i \in I}$ un ensemble de représentants des classes de C-comodules simples. Posons $C_i = C_{E_i}$, de sorte que C est somme directe des cogèbres simples C_i. Si J est une partie de I, $C_J = \sum_{i \in J} C_i$ est une sous-cogèbre de C, et toute sous-cogèbre de C s'obtient de cette manière, et de façon unique. La sous-catégorie correspondant à C_J est formée des comodules isomorphes à des sommes directes finies des E_i, $i \in J$.

2.5. Où l'on caractérise Com^f_C

Soit M une catégorie abélienne munie des deux structures suivantes:

a) M est une catégorie *sur* K; cela signifie que, si E, F sont des objets de M, $\mathrm{Hom}^M(E, F)$ est muni d'une structure de K-espace vectoriel, la composition des morphismes étant bilinéaire.

b) On se donne un foncteur $v: M \to \mathrm{Vect}^f_K$ de M dans la catégorie des K-espaces vectoriels de dimension finie.

On fait les *hypothèses* suivantes:

(i) Le foncteur v est *K-linéaire,* i.e. pour tout $E, F \in M$, l'application $v: \mathrm{Hom}^M(E, F) \to \mathrm{Hom}(v(E), v(F))$ est K-linéaire.

(ii) Le foncteur v est *exact* et *fidèle.*

Théorème 3. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe une cogèbre* C *sur* K (et une seule, à isomorphisme près) *telle que* M *soit équivalente à* Com^f_C, *cette équivalence transformant le foncteur* v *en le foncteur* C*-module* $\mapsto$ *espace vectoriel sous-jacent.*

[Ici, il est nécessaire d'interpréter M comme une petite catégorie, ou en tout cas de supposer qu'il existe un ensemble de représentants pour les classes d'isomorphisme d'objets de M.]