

2.3. Traductions

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

COROLLAIRE. *La catégorie Com_C^f est isomorphe à la catégorie $\text{Mod}_{A^0}^f$.*

Remarque. Soit $E \in \text{Com}_C^f$; munissons E' (resp. E) de la structure correspondante de A -module à gauche (resp. à droite). Si $x \in E$, $x' \in E'$ et $a, b \in A$, on a alors les formules:

$$(1) \quad \langle d_E(x), a \otimes x' \rangle = \langle x, ax' \rangle = \langle xa, x' \rangle$$

et

$$(2) \quad \langle d_E^{(2)}(x), a \otimes b \otimes x' \rangle = \langle x, abx' \rangle = \langle xab, x' \rangle ,$$

avec

$$d_E^{(2)} = (d \otimes 1_E) \circ d_E = (1_C \otimes d_E) \circ d_E .$$

2.3. TRADUCTIONS

Tout résultat sur les modules donne, grâce à la prop. 2 et à son corollaire, un résultat correspondant sur les comodules. Voici quelques exemples:

a) Si $E \in \text{Com}_C^f$, la sous-cogèbre C_E de C attachée à E (cf. n° 2.1) est la duale de la sous-algèbre de $\text{End}(E)$ définie par la structure de module de E .

b) Le fait que C soit un C -comodule injectif (cf. n° 1.4) est la traduction du fait que A est un A -module projectif (puisque libre de rang 1!).

c) Une cogèbre est dite *simple* si elle est $\neq 0$ et n'admet pas d'autre sous-cogèbre que 0 et elle-même; c'est alors le dual d'une algèbre simple de rang fini. Elle est dite *semi-simple* si elle est somme de sous-cogèbres simples, et on vérifie alors que l'on peut choisir cette somme de telle sorte qu'elle soit *directe*.

On a:

PROPOSITION 3. *Pour que Com_C^f soit une catégorie semi-simple, il faut et il suffit que C soit semi-simple.*

De plus, si c'est le cas, et si E_α est une famille de représentants des classes de comodules simples sur C , la cogèbre C est somme directe des cogèbres C_{E_α} , qui sont simples.

On a également:

COROLLAIRE. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) C est somme directe de cogèbres de la forme $\mathbf{M}_n(K)$.

b) Com_C^f est semi-simple, et tout objet simple de Com_C^f est absolument simple.

C'est trivial à partir du résultat analogue pour les algèbres.

[Noter que ce résultat s'applique notamment à la bigèbre d'un groupe réductif déployé sur K , lorsque $\text{car}(K) = 0$. Mais, bien entendu, il ne donne que la structure de cogèbre de la bigèbre en question, pas sa structure d'algèbre.]

d) A tout $E \in \text{Com}_C^f$ on peut associer un élément *trace* $\theta_E \in C$ de la manière suivante: E définit un morphisme de cogèbres

$$\text{End}(E) \rightarrow C \quad (\text{cf. n}^\circ 1.2)$$

et l'on prend l'image de 1_E dans C par ce morphisme. En termes d'une base (v_i) de E , et des $c_{ij} \in C$ correspondants (*loc. cit.*), on a $\theta_E = \sum_i c_{ii}$.

[Voici encore une autre définition: si l'on regarde E comme module sur l'algèbre C'_E duale de C_E , on a $C'_E \subset \text{End}(E)$, et la forme $u \mapsto \text{Tr}(u)$, étant une forme linéaire sur C'_E , s'identifie à un élément de C_E qui n'est autre que θ_E .]

PROPOSITION 4. *Supposons K de caractéristique 0. Soient E_1 et E_2 deux comodules de rang fini, et soient $\theta_1, \theta_2 \in C$ les traces correspondantes. On a $\theta_1 = \theta_2$ si et seulement si les quotients de Jordan-Hölder de E_1 et E_2 coïncident (avec leurs multiplicités).*

En effet, le résultat dual (pour les modules de rang fini sur une algèbre) est bien connu (*Alg. VIII*).

COROLLAIRE. *Si E_1 et E_2 sont semi-simples, on a $\theta_1 = \theta_2$ si et seulement si E_1 et E_2 sont isomorphes.*

Remarques

1) On peut aussi donner des résultats lorsque $\text{car}(K) \neq 0$. Par exemple, si les E_α sont des comodules absolument simples deux à deux non isomorphes, les θ_α correspondants sont linéairement indépendants sur K .

2) Les résultats précédents s'appliquent notamment aux *représentations linéaires* d'un schéma en groupes (ou en monoïdes) affine sur K .

2.4. CORRESPONDANCE ENTRE SOUS-COGÈBRES ET SOUS-CATÉGORIES DE Com_C^f .

Si D est une sous-cogèbre de C , on a déjà remarqué que tout D -comodule peut être considéré comme un C -comodule. On obtient ainsi un isomorphisme de Com_D^f sur une sous-catégorie abélienne \tilde{D} de Com_C^f .