

1.4. Conséquences d'une hypothèse de platitude

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Exemples

1) Prenons $V = E$ et $g = 1_E$; l'élément correspondant de $\text{Hom}^C(E, C \otimes E)$ est le coproduit $d_E: E \rightarrow C \otimes E$.

2) Prenons $V = K$. On obtient une bijection $\theta: E' \rightarrow \text{Hom}^C(E, C)$. La bijection réciproque associe à tout morphisme $f: E \rightarrow C$ la forme linéaire $e \circ f$.

1.4. CONSÉQUENCES D'UNE HYPOTHÈSE DE PLATITUDE

A partir de maintenant, on suppose que C est *plat* (comme K -module). Si V est un sous-module d'un module W , on identifie $C \otimes V$ au sous-module correspondant de $C \otimes W$, et $C \otimes (W/V)$ à $(C \otimes W)/(C \otimes V)$.

DÉFINITION 3. Soit E un C -comodule, et soit V un sous-module de E . On dit que V est stable par C (ou que c'est un sous-comodule de E) si d_E applique V dans $C \otimes V$.

Si tel est le cas, on vérifie tout de suite que l'application $d_V: V \rightarrow C \otimes V$ induite par d_E fait de V un comodule (d'où la terminologie); on définit de même le comodule quotient E/V .

Exemples

1) Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille de sous-modules du comodule E . Si les V_i sont stables par C , il en est de même de $\sum_{i \in I} V_i$ (resp. de $\bigcap_{i \in I} V_i$ lorsque I est fini). Cela résulte des formules:

$$\begin{aligned} C \otimes (\sum V_i) &= \sum (C \otimes V_i) \\ \text{et} \quad C \otimes (\bigcap V_i) &= \bigcap (C \otimes V_i), \quad I \text{ fini,} \end{aligned}$$

cf. *Alg. Comm.*, chap. I, §2.

2) Si E est un comodule, le morphisme $d_E: E \rightarrow C \otimes E$ identifie E à un sous-comodule de $C \otimes E$ (muni du coproduit $d \otimes 1_E$, cf. n° 1.3). On notera que ce sous-comodule est même *facteur direct* dans $C \otimes E$ comme K -module (mais pas en général comme comodule), en vertu de la formule (2) de la définition 1.

PROPOSITION 2. Soit $f: E_1 \rightarrow E_2$ un morphisme de comodules. Alors $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par C ; de plus, f définit par passage au quotient un isomorphisme du comodule $E_1/\text{Ker}(f)$ sur le comodule $\text{Im}(f)$.

Puisque C est plat, $C \otimes \text{Ker}(f)$ est le noyau de $1_C \otimes f$ et $C \otimes \text{Im}(f)$ en est l'image. On en déduit aussitôt que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par C . Le fait que f définisse un isomorphisme de $E_1/\text{Ker}(f)$ sur $\text{Im}(f)$ est immédiat.

COROLLAIRE 1. *La catégorie Com_C est une catégorie abélienne et le foncteur «module sous-jacent» est exact.*

C'est clair.

Remarque. Il est non moins clair que le foncteur «module sous-jacent» commute aux limites projectives finies et aux limites inductives quelconques.

COROLLAIRE 2. *Si V est un K -module injectif, le comodule $C \otimes V$ est injectif dans Com_C .*

En effet, la proposition 1 montre que le foncteur

$$E \mapsto \text{Hom}^C(E, C \otimes V)$$

est exact.

PROPOSITION 3. *Soit V un sous-module d'un comodule E , et soit V° l'ensemble des éléments $x \in E$ tels que $d_E(x)$ appartienne à $C \otimes V$. Alors V° est un sous-comodule de E ; c'est le plus grand sous-comodule de E contenu dans V .*

Il faut d'abord prouver que V° est stable par C , i.e. que d_E applique V° dans $C \otimes V^\circ$. Or V° est défini comme le noyau de l'homomorphisme $E \rightarrow C \otimes E \rightarrow C \otimes (E/V)$, la première flèche étant d_E . Puisque C est plat, il s'ensuit que $C \otimes V^\circ$ est le noyau de l'homomorphisme

$$C \otimes E \rightarrow C \otimes C \otimes E \rightarrow C \otimes C \otimes (E/V),$$

la première flèche étant $1_C \otimes d_E$. Pour prouver que $d_E(V^\circ)$ est contenu dans $C \otimes V^\circ$, il suffit donc de vérifier que le composé

$$V^\circ \rightarrow C \otimes E \rightarrow C \otimes C \otimes E \rightarrow C \otimes C \otimes (E/V)$$

est nul. Mais, d'après l'axiome (1) de la déf. 1, le composé $(1_C \otimes d_E) \circ d_E$ est égal à $(d \otimes 1_E) \circ d_E$. Or d_E applique V° dans $C \otimes V$ par construction; l'image de V° dans $C \otimes C \otimes E$ est donc contenue dans $(d \otimes 1_E)(C \otimes V)$, donc dans $C \otimes C \otimes V$, et son image dans $C \otimes C \otimes (E/V)$ est bien nulle.

D'autre part, l'axiome (2) de la déf. 1 montre que V^o est contenu dans $(e \otimes 1_E)(C \otimes V)$, donc dans V . Enfin, il est clair que tout sous-comodule de E contenu dans V est contenu dans V^o , cqfd.

Nous dirons qu'un comodule est de *type fini* (resp. libre, projectif, ...) si c'est un K -module de type fini (resp. un K -module libre, un K -module projectif, ...).

COROLLAIRE. *Supposons K noethérien. Tout comodule E est alors réunion filtrante croissante de ses sous-comodules de type fini.*

Il suffit évidemment de prouver ceci: si W est un sous-module de type fini de E , il existe un sous-comodule de E , qui est de type fini et contient W . Or $d_E(W)$ est un sous-module de type fini de $C \otimes E$. On peut donc trouver un sous-module V de type fini de E tel que $C \otimes V$ contienne $d_E(W)$. Soit V^o l'ensemble des $x \in E$ tels que $d_E(x) \in C \otimes V$. D'après la proposition, V^o est un sous-comodule de E contenu dans V , donc de type fini (puisque K est noethérien). Il est clair que V^o contient W , cqfd.

§2. COGÈBRES SUR UN CORPS

A partir de maintenant, l'anneau de base K est un *corps*.

2.1. SOUS-COGÈBRES

Soit C une cogèbre sur K , de coproduit d et de co-unité e .

DÉFINITION 1. *Un sous-espace vectoriel X de C est appelé une sous-cogèbre de C si $d(X)$ est contenu dans $X \otimes X$.*

S'il en est ainsi, l'application linéaire $d_X: X \rightarrow X \otimes X$ induite par d munit X d'une structure de cogèbre, ayant pour co-unité la restriction de e à X .

Exemples

1) Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-cogèbres de C , la somme des X_i et l'intersection des X_i sont des sous-cogèbres de C . Cela se vérifie au moyen des formules:

$$\begin{aligned} \sum (X_i \otimes X_i) &\subset (\sum X_i) \otimes (\sum X_i) \\ \cap (X_i \otimes X_i) &= (\cap X_i) \otimes (\cap X_i) . \end{aligned}$$