1.4. Conséquences d'une hypothèse de platitude

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Exemples

1) Prenons $V = E$ et $g = 1_E$; l'élément correspondant de $\mathrm{Hom}^C(E, C \otimes E)$ est le coproduit $d_E : E \to C \otimes E$.

2) Prenons $V = K$. On obtient une bijection $\theta : E' \to \mathrm{Hom}^C(E, C)$. La bijection réciproque associe à tout morphisme $f : E \to C$ la forme linéaire $e \circ f$.

1.4. Conséquences d'une hypothèse de platitude

A partir de maintenant, on suppose que C est *plat* (comme K-module). Si V est un sous-module d'un module W, on identifie $C \otimes V$ au sous-module correspondant de $C \otimes W$, et $C \otimes (W/V)$ à $(C \otimes W)/(C \otimes V)$.

Définition 3. *Soit E un C-comodule, et soit V un sous-module de E. On dit que V est stable par C (ou que c'est un sous-comodule de E) si d_E applique V dans $C \otimes V$.*

Si tel est le cas, on vérifie tout de suite que l'application $d_V : V \to C \otimes V$ induite par d_E fait de V un comodule (d'où la terminologie); on définit de même le comodule quotient E/V.

Exemples

1) Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille de sous-modules du comodule E. Si les V_i sont stables par C, il en est de même de $\sum_{i \in I} V_i$ (resp. de $\bigcap_{i \in I} V_i$ lorsque I est fini). Cela résulte des formules:

$$C \otimes (\textstyle\sum V_i) = \sum (C \otimes V_i)$$

et

$$C \otimes (\textstyle\bigcap V_i) = \bigcap (C \otimes V_i)\,, \quad I \text{ fini}\,,$$

cf. *Alg. Comm.*, chap. I, §2.

2) Si E est un comodule, le morphisme $d_E : E \to C \otimes E$ *identifie E à un sous-comodule de $C \otimes E$* (muni du coproduit $d \otimes 1_E$, cf. n° 1.3). On notera que ce sous-comodule est même *facteur direct* dans $C \otimes E$ comme K-module (mais pas en général comme comodule), en vertu de la formule (2) de la définition 1.

Proposition 2. *Soit $f : E_1 \to E_2$ un morphisme de comodules. Alors* $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont stables par C; de plus, f définit par passage au quotient un isomorphisme du comodule $E_1/\mathrm{Ker}(f)$ sur le comodule* $\mathrm{Im}(f)$.

Puisque C est plat, $C \otimes \mathrm{Ker}(f)$ est le noyau de $1_C \otimes f$ et $C \otimes \mathrm{Im}(f)$ en est l'image. On en déduit aussitôt que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par C. Le fait que f définisse un isomorphisme de $E_1/\mathrm{Ker}(f)$ sur $\mathrm{Im}(f)$ est immédiat.

COROLLAIRE 1. *La catégorie* Com_C *est une catégorie abélienne et le foncteur «module sous-jacent» est exact.*

C'est clair.

Remarque. Il est non moins clair que le foncteur «module sous-jacent» commute aux limites projectives finies et aux limites inductives quelconques.

COROLLAIRE 2. *Si* V *est un K-module injectif, le comodule* $C \otimes V$ *est injectif dans* Com_C.

En effet, la proposition 1 montre que le foncteur

$$E \mapsto \mathrm{Hom}^C(E, C \otimes V)$$

est exact.

PROPOSITION 3. *Soit* V *un sous-module d'un comodule* E, *et soit* V^o *l'ensemble des éléments* $x \in E$ *tels que* $d_E(x)$ *appartienne à* $C \otimes V$. *Alors* V^o *est un sous-comodule de* E; *c'est le plus grand sous-comodule de* E *contenu dans* V.

Il faut d'abord prouver que V^o est stable par C, i.e. que d_E applique V^o dans $C \otimes V^o$. Or V^o est défini comme le noyau de l'homomorphisme $E \to C \otimes E \to C \otimes (E/V)$, la première flèche étant d_E. Puisque C est plat, il s'ensuit que $C \otimes V^o$ est le noyau de l'homomorphisme

$$C \otimes E \to C \otimes C \otimes E \to C \otimes C \otimes (E/V)\,,$$

la première flèche étant $1_C \otimes d_E$. Pour prouver que $d_E(V^o)$ est contenu dans $C \otimes V^o$, il suffit donc de vérifier que le composé

$$V^o \to C \otimes E \to C \otimes C \otimes E \to C \otimes C \otimes (E/V)$$

est nul. Mais, d'après l'axiome (1) de la déf. 1, le composé $(1_C \otimes d_E) \circ d_E$ est égal à $(d \otimes 1_E) \circ d_E$. Or d_E applique V^o dans $C \otimes V$ par construction; l'image de V^o dans $C \otimes C \otimes E$ est donc contenue dans $(d \otimes 1_E)(C \otimes V)$, donc dans $C \otimes C \otimes V$, et son image dans $C \otimes C \otimes (E/V)$ est bien nulle.

D'autre part, l'axiome (2) de la déf. 1 montre que V^o est contenu dans $(e \otimes 1_E)(C \otimes V)$, donc dans V. Enfin, il est clair que tout sous-comodule de E contenu dans V est contenu dans V^o, cqfd.

Nous dirons qu'un comodule est de *type fini* (resp. libre, projectif, ...) si c'est un K-module de type fini (resp. un K-module libre, un K-module projectif, ...).

COROLLAIRE. *Supposons K noethérien. Tout comodule E est alors réunion filtrante croissante de ses sous-comodules de type fini.*

Il suffit évidemment de prouver ceci: si W est un sous-module de type fini de E, il existe un sous-comodule de E, qui est de type fini et contient W. Or $d_E(W)$ est un sous-module de type fini de $C \otimes E$. On peut donc trouver un sous-module V de type fini de E tel que $C \otimes V$ contienne $d_E(W)$. Soit V^o l'ensemble des $x \in E$ tels que $d_E(x) \in C \otimes V$. D'après la proposition, V^o est un sous-comodule de E contenu dans V, donc de type fini (puique K est noethérien). Il est clair que V^o contient W, cqfd.

§2. COGÈBRES SUR UN CORPS

A partir de maintenant, l'anneau de base K est un *corps*.

2.1. SOUS-COGÈBRES

Soit C une cogèbre sur K, de coproduit d et de co-unité e.

DÉFINITION 1. *Un sous-espace vectoriel X de C est appelé une sous-cogèbre de C si $d(X)$ est contenu dans $X \otimes X$.*

S'il en est ainsi, l'application linéaire $d_X : X \to X \otimes X$ induite par d munit X d'une structure de cogèbre, ayant pour co-unité la restriction de e à X.

Exemples

1) Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-cogèbres de C, la somme des X_i et l'intersection des X_i sont des sous-cogèbres de C. Cela se vérifie au moyen des formules:

$$\sum (X_i \otimes X_i) \subset (\sum X_i) \otimes (\sum X_i)$$
$$\bigcap (X_i \otimes X_i) = (\bigcap X_i) \otimes (\bigcap X_i) .$$