1.3. Une formule d'adjonction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

1.3. UNE FORMULE D'ADJONCTION

On conserve les notations précédentes. Soit V un K-module; d'après le n° 1.2, Exemples 1 et 3, on a une structure naturelle de comodule sur $C \otimes V$, le coproduit correspondant étant $d \otimes 1_V$.

Soit d'autre part E un comodule. Définissons une application linéaire

$$\theta : \mathrm{Hom}(E, V) \to \mathrm{Hom}^C(E, C \otimes V)$$

par

$$\theta(g) = (1_C \otimes g) \circ d_E , \quad \text{si} \quad g \in \mathrm{Hom}(E, V) .$$

Cela a un sens, car d_E est un morphisme de E dans $C \otimes E$, et $1_C \otimes g$ est un morphisme de $C \otimes E$ dans $C \otimes V$.

PROPOSITION 1. *L'application* $\theta : \mathrm{Hom}(E, V) \to \mathrm{Hom}^C(E, C \otimes V)$ *est un isomorphisme.*

Soit $f : E \to C \otimes V$ un morphisme. En composant f avec $e \otimes 1_V$: $C \otimes V \to V$, on obtient un élément $\varepsilon(f)$ de $\mathrm{Hom}(E, V)$. On a ainsi défini une application linéaire

$$\varepsilon : \mathrm{Hom}^C(E, C \otimes V) \to \mathrm{Hom}(E, V)$$

et il suffit de prouver que θ et ε sont inverses l'un de l'autre. Tout d'abord, si $g \in \mathrm{Hom}(E, V)$, on a:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\theta(g)) &= (e \otimes 1_V) \circ \theta(g) = (e \otimes 1_V) \circ (1_C \otimes g) \circ d_E \\ &= (e \otimes g) \circ d_E = g \circ (e \otimes 1_E) \circ d_E \\ &= g \circ 1_E = g , \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\varepsilon \circ \theta = 1$.
D'autre part, si $f \in \mathrm{Hom}^C(E, C \otimes V)$, on a:

$$\begin{aligned} \theta(\varepsilon(f)) &= (1_C \otimes \varepsilon(f)) \circ d_E = (1_C \otimes ((e \otimes 1_V) \circ f)) \circ d_E \\ &= (1_C \otimes e \otimes 1_V) \circ (1_C \otimes f) \circ d_E \\ &= (1_C \otimes e \otimes 1_V) \circ (d \otimes 1_V) \circ f \\ &= (((1_C \otimes e) \circ d) \otimes 1_V) \circ f \\ &= (1_C \otimes 1_V) \circ f = f , \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\theta \circ \varepsilon = 1$, cqfd.

[Ce qui précède est un bon exemple d'un principe général: tout calcul relatif aux cogèbres est trivial et incompréhensible.]

Exemples

1) Prenons $V = E$ et $g = 1_E$; l'élément correspondant de $\mathrm{Hom}^C(E, C \otimes E)$ est le coproduit $d_E : E \to C \otimes E$.

2) Prenons $V = K$. On obtient une bijection $\theta : E' \to \mathrm{Hom}^C(E, C)$. La bijection réciproque associe à tout morphisme $f : E \to C$ la forme linéaire $e \circ f$.

1.4. Conséquences d'une hypothèse de platitude

A partir de maintenant, on suppose que C est *plat* (comme K-module). Si V est un sous-module d'un module W, on identifie $C \otimes V$ au sous-module correspondant de $C \otimes W$, et $C \otimes (W/V)$ à $(C \otimes W)/(C \otimes V)$.

Définition 3. *Soit E un C-comodule, et soit V un sous-module de E. On dit que V est stable par C (ou que c'est un sous-comodule de E) si d_E applique V dans $C \otimes V$.*

Si tel est le cas, on vérifie tout de suite que l'application $d_V : V \to C \otimes V$ induite par d_E fait de V un comodule (d'où la terminologie); on définit de même le comodule quotient E/V.

Exemples

1) Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille de sous-modules du comodule E. Si les V_i sont stables par C, il en est de même de $\sum_{i \in I} V_i$ (resp. de $\bigcap_{i \in I} V_i$ lorsque I est fini). Cela résulte des formules:

$$C \otimes (\sum V_i) = \sum (C \otimes V_i)$$

et

$$C \otimes (\bigcap V_i) = \bigcap (C \otimes V_i), \quad I \text{ fini},$$

cf. *Alg. Comm.*, chap. I, §2.

2) Si E est un comodule, le morphisme $d_E : E \to C \otimes E$ *identifie E à un sous-comodule de $C \otimes E$* (muni du coproduit $d \otimes 1_E$, cf. n° 1.3). On notera que ce sous-comodule est même *facteur direct* dans $C \otimes E$ comme K-module (mais pas en général comme comodule), en vertu de la formule (2) de la définition 1.

Proposition 2. *Soit $f : E_1 \to E_2$ un morphisme de comodules. Alors* $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont stables par C; de plus, f définit par passage au quotient un isomorphisme du comodule $E_1/\mathrm{Ker}(f)$ sur le comodule* $\mathrm{Im}(f)$.