Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES

Autor: Serre, Jean-Pierre

Kapitel: 1.2. Comodules

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60413

La forme bilinéaire $\mathrm{Tr}(uv)$ met C en dualité avec lui-même; appliquant la méthode de l'exemple précédent, on voit que la structure d'algèbre de C définit par dualité une structure de *cogèbre* sur C, de co-unité la trace $\mathrm{Tr}: C \to K$. En particulier $M_n(K)$ a une structure de cogèbre canonique, pour laquelle on a

$$d(E_{ij}) = \sum_k E_{kj} \otimes E_{ik} .$$

(La cogèbre *opposée* est plus sympathique, cf. exercice 1.)

(5) Soient C_1 et C_2 deux cogèbres, de coproduits d_1 et d_2 et de co-unités e_1 et e_2. Soit σ l'isomorphisme canonique de $C_2 \otimes C_1$ sur $C_1 \otimes C_2$; le composé

$$(1_{C_1} \otimes \sigma \otimes 1_{C_2}) \circ (d_1 \otimes d_2)$$

munit $C_1 \otimes C_2$ d'une structure de cogèbre, dite *produit tensoriel* de celles de C_1 et C_2; elle admet pour co-unité $e_1 \otimes e_2$.

(6) L'algèbre affine d'un schéma en monoïdes affine sur K a une structure naturelle de cogèbre, cf. n° 3.1.

1.2. Comodules

DÉFINITION 1. *On appelle comodule (à gauche) sur* C *tout module* E *muni d'une application linéaire* $d_E: E \to C \otimes E$ *vérifiant les axiomes suivants:*

(1) *Les applications linéaires* $(d \otimes 1_E) \circ d_E$ *et* $(1_C \otimes d_E) \circ d_E$ *de* E *dans* $C \otimes C \otimes E$ *coïncident.*

(2) $(e \otimes 1_E) \circ d_E = 1_E$.

L'application d_E s'appelle le *coproduit* de E; on se permet souvent de le (la) noter d.

Remarques

1) Il y a une notion analogue de comodule *à droite*; on laisse au lecteur le soin de l'expliciter (ou de remplacer la cogèbre C par son opposée C^o). [Le rédacteur s'est aperçu trop tard qu'il était plus commode d'échanger droite et gauche, i.e. d'appeler «comodules à droite» ceux de la définition 1.]

2) Toute application linéaire $d_E: E \to C \otimes E$ définit de manière évidente une application linéaire $d_E^1: E \otimes E' \to C$. Lorsque E est un K-module projectif de type fini, l'application $d_E \mapsto d_E^1$ est un isomorphisme de $\mathrm{Hom}(E, C \otimes E)$ sur $\mathrm{Hom}(E \otimes E', C)$. Or $E \otimes E' = \mathrm{End}(E)$ a une structure naturelle de cogèbre, cf. n° 1.1, Exemple 4). On peut vérifier (cf. exercice 1) que d_E *vérifie les axiomes* (1) *et* (2) *si et seulement si* d_E^1 *est*

un morphisme de la cogèbre opposée End$(E)^o$ *à* End(E) *dans la cogèbre* C, *compatible avec les co-unités.*

3) Supposons que E soit *libre* de base $(v_i)_{i \in I}$. Une application linéaire $d_E: E \to C \otimes E$ est alors définie par une famille c_{ij}, $i, j \in I$, d'éléments de C telle que $d_E(v_i) = \sum_{j \in I} c_{ij} \otimes v_j$ (pour i fixé, c_{ij} doit être nul pour presque tout j). Les conditions (1) et (2) de la définition 1 se traduisent alors par les formules:

$$(1') \quad d(c_{ij}) = \sum_{k \in I} c_{ik} \otimes c_{kj} \qquad \text{pour} \quad i, j \in I$$

$$(2') \quad e(c_{ij}) = \delta_{ij} \qquad \text{pour} \quad i, j \in I\,.$$

(Lorsque I est *fini*, cet exemple peut être considéré comme un cas particulier du précédent.)

Exemples de comodules

1) Le module C, muni de d, est un comodule (à gauche et à droite).

2) La somme directe d'une famille de comodules a une structure naturelle de comodule.

3) Si E est un comodule, et V un K-module quelconque, le couple $(E \otimes V, d_E \otimes 1_V)$ est un comodule, noté simplement $E \otimes V$.

4) Les notations étant celles de l'exemple 5) du n° 1.1, soient E_1 un comodule sur C_1 et E_2 un comodule sur C_2. Soit τ l'isomorphisme canonique de $E_1 \otimes C_2$ sur $C_2 \otimes E_1$; l'application

$$(1_{C_1} \otimes \tau \otimes 1_{E_2}) \circ (d_{E_1} \otimes d_{E_2})$$

munit $E_1 \otimes E_2$ d'une structure de comodule sur $C_1 \otimes C_2$.

5) Si G est un schéma en monoïdes affine sur K, et C la bigèbre correspondante (cf. n° 3.1), la notion de comodule sur C coïncide avec celle de *représentation linéaire de* G (ou G-module), cf. n° 3.2, ainsi que SGAD, exposé I.

DÉFINITION 2. *Soient* E_1 *et* E_2 *deux comodules. On appelle* C*-morphisme (ou simplement morphisme) de* E_1 *dans* E_2 *toute application linéaire* $f: E_1 \to E_2$ *telle que*

$$(*) \qquad (1_C \otimes f) \circ d_{E_1} = d_{E_2} \circ f\,.$$

Les C-morphismes de E_1 dans E_2 forment un sous-K-module de $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$; on le note $\mathrm{Hom}^C(E_1, E_2)$.

On note Com_C la catégorie des C-comodules (à gauche); l'addition des C-morphismes munit Com_C d'une structure de *catégorie additive.*