

## 1.2. Comodules

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

La forme bilinéaire  $\text{Tr}(uv)$  met  $C$  en dualité avec lui-même; appliquant la méthode de l'exemple précédent, on voit que la structure d'algèbre de  $C$  définit par dualité une structure de *cogèbre* sur  $C$ , de co-unité la trace  $\text{Tr}: C \rightarrow K$ . En particulier  $M_n(K)$  a une structure de cogèbre canonique, pour laquelle on a

$$d(E_{ij}) = \sum_k E_{kj} \otimes E_{ik}.$$

(La cogèbre *opposée* est plus sympathique, cf. exercice 1.)

(5) Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux cogèbres, de coproduits  $d_1$  et  $d_2$  et de co-unités  $e_1$  et  $e_2$ . Soit  $\sigma$  l'isomorphisme canonique de  $C_2 \otimes C_1$  sur  $C_1 \otimes C_2$ ; le composé

$$(1_{C_1} \otimes \sigma \otimes 1_{C_2}) \circ (d_1 \otimes d_2)$$

munit  $C_1 \otimes C_2$  d'une structure de cogèbre, dite *produit tensoriel* de celles de  $C_1$  et  $C_2$ ; elle admet pour co-unité  $e_1 \otimes e_2$ .

(6) L'algèbre affine d'un schéma en monoïdes affine sur  $K$  a une structure naturelle de cogèbre, cf. n° 3.1.

## 1.2. COMODULES

DÉFINITION 1. On appelle *comodule (à gauche) sur  $C$*  tout module  $E$  muni d'une application linéaire  $d_E: E \rightarrow C \otimes E$  vérifiant les axiomes suivants:

(1) Les applications linéaires  $(d \otimes 1_E) \circ d_E$  et  $(1_C \otimes d_E) \circ d_E$  de  $E$  dans  $C \otimes C \otimes E$  coïncident.

(2)  $(e \otimes 1_E) \circ d_E = 1_E$ .

L'application  $d_E$  s'appelle le *coproduit* de  $E$ ; on se permet souvent de le (la) noter  $d$ .

### Remarques

1) Il y a une notion analogue de comodule *à droite*; on laisse au lecteur le soin de l'explicitier (ou de remplacer la cogèbre  $C$  par son opposée  $C^\circ$ ). [Le rédacteur s'est aperçu trop tard qu'il était plus commode d'échanger droite et gauche, i.e. d'appeler «comodules à droite» ceux de la définition 1.]

2) Toute application linéaire  $d_E: E \rightarrow C \otimes E$  définit de manière évidente une application linéaire  $d_E^1: E \otimes E' \rightarrow C$ . Lorsque  $E$  est un  $K$ -module projectif de type fini, l'application  $d_E \mapsto d_E^1$  est un isomorphisme de  $\text{Hom}(E, C \otimes E)$  sur  $\text{Hom}(E \otimes E', C)$ . Or  $E \otimes E' = \text{End}(E)$  a une structure naturelle de cogèbre, cf. n° 1.1, Exemple 4). On peut vérifier (cf. exercice 1) que  $d_E$  vérifie les axiomes (1) et (2) si et seulement si  $d_E^1$  est

un morphisme de la cogèbre opposée  $\text{End}(E)^\circ$  à  $\text{End}(E)$  dans la cogèbre  $C$ , compatible avec les co-unités.

3) Supposons que  $E$  soit libre de base  $(v_i)_{i \in I}$ . Une application linéaire  $d_E: E \rightarrow C \otimes E$  est alors définie par une famille  $c_{ij}$ ,  $i, j \in I$ , d'éléments de  $C$  telle que  $d_E(v_i) = \sum_{j \in I} c_{ij} \otimes v_j$  (pour  $i$  fixé,  $c_{ij}$  doit être nul pour presque tout  $j$ ). Les conditions (1) et (2) de la définition 1 se traduisent alors par les formules:

$$(1') \quad d(c_{ij}) = \sum_{k \in I} c_{ik} \otimes c_{kj} \quad \text{pour } i, j \in I$$

$$(2') \quad e(c_{ij}) = \delta_{ij} \quad \text{pour } i, j \in I.$$

(Lorsque  $I$  est fini, cet exemple peut être considéré comme un cas particulier du précédent.)

### Exemples de comodules

- 1) Le module  $C$ , muni de  $d$ , est un comodule (à gauche et à droite).
- 2) La somme directe d'une famille de comodules a une structure naturelle de comodule.
- 3) Si  $E$  est un comodule, et  $V$  un  $K$ -module quelconque, le couple  $(E \otimes V, d_E \otimes 1_V)$  est un comodule, noté simplement  $E \otimes V$ .
- 4) Les notations étant celles de l'exemple 5) du n° 1.1, soient  $E_1$  un comodule sur  $C_1$  et  $E_2$  un comodule sur  $C_2$ . Soit  $\tau$  l'isomorphisme canonique de  $E_1 \otimes C_2$  sur  $C_2 \otimes E_1$ ; l'application

$$(1_{C_1} \otimes \tau \otimes 1_{E_2}) \circ (d_{E_1} \otimes d_{E_2})$$

munit  $E_1 \otimes E_2$  d'une structure de comodule sur  $C_1 \otimes C_2$ .

- 5) Si  $G$  est un schéma en monoïdes affine sur  $K$ , et  $C$  la bigèbre correspondante (cf. n° 3.1), la notion de comodule sur  $C$  coïncide avec celle de représentation linéaire de  $G$  (ou  $G$ -module), cf. n° 3.2, ainsi que SGAD, exposé I.

DÉFINITION 2. Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux comodules. On appelle  $C$ -morphisme (ou simplement morphisme) de  $E_1$  dans  $E_2$  toute application linéaire  $f: E_1 \rightarrow E_2$  telle que

$$(*) \quad (1_C \otimes f) \circ d_{E_1} = d_{E_2} \circ f.$$

Les  $C$ -morphisms de  $E_1$  dans  $E_2$  forment un sous- $K$ -module de  $\text{Hom}(E_1, E_2)$ ; on le note  $\text{Hom}^C(E_1, E_2)$ .

On note  $\text{Com}_C$  la catégorie des  $C$ -comodules (à gauche); l'addition des  $C$ -morphisms munit  $\text{Com}_C$  d'une structure de catégorie additive.