1.1. Cogèbres

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

On note Alg_K la catégorie des anneaux commutatifs K_1 munis d'un morphisme $K \to K_1$.

L'application identique d'un ensemble X est notée 1_X (ou simplement 1 si aucune confusion sur X n'est à craindre).

§ 1. COGÈBRES ET COMODULES (GÉNÉRALITÉS)

1.1. COGÈBRES

Dans tout ce paragraphe, C désigne une *cogèbre,* de coproduit d, possédant une co-unité (à droite et à gauche) e. Rappelons (cf. *Alg.* III) ce que cela signifie:

C est un module (sur K);

d est une application linéaire de C dans $C \otimes C$;

e est une forme linéaire sur C.

De plus, ces données vérifient les axiomes suivants:

(C_1) (Coassociativité) Les applications linéaires $(1_C \otimes d) \circ d$ et $(d \otimes 1_C) \circ d$ de C dans $C \otimes C \otimes C$ coïncident.

(C_2) (Co-unité) $(1_C \otimes e) \circ d = 1_C$ et $(e \otimes 1_C) \circ d = 1_C$.

Exemples

(1) Soit C une cogèbre de co-unité e. En composant le coproduit de C avec la symétrie canonique de $C \otimes C$, on obtient une seconde structure de cogèbre sur C, dite *opposée* de la première. On la note C^o; la co-unité de C^o est e.

(2) Toute somme directe de cogèbres a une structure naturelle de cogèbre. En particulier, 0 est une cogèbre.

(3) Supposons que C soit projectif de type fini (comme K-module), et soit A son dual. Comme le dual de $C \otimes C$ s'identifie à $A \otimes A$, toute structure de cogèbre sur C correspond à une structure d'*algèbre associative* sur A, et réciproquement. Pour que $e \in A$ soit co-unité de C, il faut et il suffit que ce soit un élément unité (à gauche et à droite) pour A.

(Lorsque K est un corps, on verra plus loin que toute cogèbre est limite inductive de cogèbres obtenues par ce procédé.)

(4) Soit V un module projectif de type fini. Soit

$$C = \mathrm{End}(V) = V \otimes V' .$$

La forme bilinéaire $\mathrm{Tr}(uv)$ met C en dualité avec lui-même; appliquant la méthode de l'exemple précédent, on voit que la structure d'algèbre de C définit par dualité une structure de *cogèbre* sur C, de co-unité la trace $\mathrm{Tr}: C \to K$. En particulier $M_n(K)$ a une structure de cogèbre canonique, pour laquelle on a

$$d(E_{ij}) = \sum_k E_{kj} \otimes E_{ik} \, .$$

(La cogèbre *opposée* est plus sympathique, cf. exercice 1.)

(5) Soient C_1 et C_2 deux cogèbres, de coproduits d_1 et d_2 et de co-unités e_1 et e_2. Soit σ l'isomorphisme canonique de $C_2 \otimes C_1$ sur $C_1 \otimes C_2$; le composé

$$(1_{C_1} \otimes \sigma \otimes 1_{C_2}) \circ (d_1 \otimes d_2)$$

munit $C_1 \otimes C_2$ d'une structure de cogèbre, dite *produit tensoriel* de celles de C_1 et C_2; elle admet pour co-unité $e_1 \otimes e_2$.

(6) L'algèbre affine d'un schéma en monoïdes affine sur K a une structure naturelle de cogèbre, cf. n° 3.1.

1.2. COMODULES

DÉFINITION 1. *On appelle comodule (à gauche) sur C tout module E muni d'une application linéaire $d_E: E \to C \otimes E$ vérifiant les axiomes suivants:*

(1) *Les applications linéaires $(d \otimes 1_E) \circ d_E$ et $(1_C \otimes d_E) \circ d_E$ de E dans $C \otimes C \otimes E$ coïncident.*

(2) $(e \otimes 1_E) \circ d_E = 1_E$.

L'application d_E s'appelle le *coproduit* de E; on se permet souvent de le (la) noter d.

Remarques

1) Il y a une notion analogue de comodule *à droite*; on laisse au lecteur le soin de l'expliciter (ou de remplacer la cogèbre C par son opposée C^o). [Le rédacteur s'est aperçu trop tard qu'il était plus commode d'échanger droite et gauche, i.e. d'appeler «comodules à droite» ceux de la définition 1.]

2) Toute application linéaire $d_E: E \to C \otimes E$ définit de manière évidente une application linéaire $d_E^1: E \otimes E' \to C$. Lorsque E est un K-module projectif de type fini, l'application $d_E \mapsto d_E^1$ est un isomorphisme de $\mathrm{Hom}(E, C \otimes E)$ sur $\mathrm{Hom}(E \otimes E', C)$. Or $E \otimes E' = \mathrm{End}(E)$ a une structure naturelle de cogèbre, cf. n° 1.1, Exemple 4). On peut vérifier (cf. exercice 1) que d_E *vérifie les axiomes* (1) *et* (2) *si et seulement si* d_E^1 *est*