

1.1. Cogèbres

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

On note Alg_K la catégorie des anneaux commutatifs K_1 munis d'un morphisme $K \rightarrow K_1$.

L'application identique d'un ensemble X est notée 1_X (ou simplement 1 si aucune confusion sur X n'est à craindre).

§1. COGÈBRES ET COMODULES (GÉNÉRALITÉS)

1.1. COGÈBRES

Dans tout ce paragraphe, C désigne une *cogèbre*, de coproduit d , possédant une co-unité (à droite et à gauche) e . Rappelons (cf. *Alg.* III) ce que cela signifie:

C est un module (sur K);

d est une application linéaire de C dans $C \otimes C$;

e est une forme linéaire sur C .

De plus, ces données vérifient les axiomes suivants:

(C_1) (Coassociativité) Les applications linéaires $(1_C \otimes d) \circ d$ et $(d \otimes 1_C) \circ d$ de C dans $C \otimes C \otimes C$ coïncident.

(C_2) (Co-unité) $(1_C \otimes e) \circ d = 1_C$ et $(e \otimes 1_C) \circ d = 1_C$.

Exemples

(1) Soit C une cogèbre de co-unité e . En composant le coproduit de C avec la symétrie canonique de $C \otimes C$, on obtient une seconde structure de cogèbre sur C , dite *opposée* de la première. On la note C^o ; la co-unité de C^o est e .

(2) Toute somme directe de cogèbres a une structure naturelle de cogèbre. En particulier, 0 est une cogèbre.

(3) Supposons que C soit projectif de type fini (comme K -module), et soit A son dual. Comme le dual de $C \otimes C$ s'identifie à $A \otimes A$, toute structure de cogèbre sur C correspond à une structure d'*algèbre associative* sur A , et réciproquement. Pour que $e \in A$ soit co-unité de C , il faut et il suffit que ce soit un élément unité (à gauche et à droite) pour A .

(Lorsque K est un corps, on verra plus loin que toute cogèbre est limite inductive de cogèbres obtenues par ce procédé.)

(4) Soit V un module projectif de type fini. Soit

$$C = \text{End}(V) = V \otimes V' .$$

La forme bilinéaire $\text{Tr}(uv)$ met C en dualité avec lui-même; appliquant la méthode de l'exemple précédent, on voit que la structure d'algèbre de C définit par dualité une structure de *cogèbre* sur C , de co-unité la trace $\text{Tr}: C \rightarrow K$. En particulier $M_n(K)$ a une structure de cogèbre canonique, pour laquelle on a

$$d(E_{ij}) = \sum_k E_{kj} \otimes E_{ik}.$$

(La cogèbre *opposée* est plus sympathique, cf. exercice 1.)

(5) Soient C_1 et C_2 deux cogèbres, de coproduits d_1 et d_2 et de co-unités e_1 et e_2 . Soit σ l'isomorphisme canonique de $C_2 \otimes C_1$ sur $C_1 \otimes C_2$; le composé

$$(1_{C_1} \otimes \sigma \otimes 1_{C_2}) \circ (d_1 \otimes d_2)$$

munit $C_1 \otimes C_2$ d'une structure de cogèbre, dite *produit tensoriel* de celles de C_1 et C_2 ; elle admet pour co-unité $e_1 \otimes e_2$.

(6) L'algèbre affine d'un schéma en monoïdes affine sur K a une structure naturelle de cogèbre, cf. n° 3.1.

1.2. COMODULES

DÉFINITION 1. On appelle *comodule (à gauche) sur C* tout module E muni d'une application linéaire $d_E: E \rightarrow C \otimes E$ vérifiant les axiomes suivants:

(1) Les applications linéaires $(d \otimes 1_E) \circ d_E$ et $(1_C \otimes d_E) \circ d_E$ de E dans $C \otimes C \otimes E$ coïncident.

(2) $(e \otimes 1_E) \circ d_E = 1_E$.

L'application d_E s'appelle le *coproduit* de E ; on se permet souvent de le (la) noter d .

Remarques

1) Il y a une notion analogue de comodule *à droite*; on laisse au lecteur le soin de l'explicitier (ou de remplacer la cogèbre C par son opposée C°). [Le rédacteur s'est aperçu trop tard qu'il était plus commode d'échanger droite et gauche, i.e. d'appeler «comodules à droite» ceux de la définition 1.]

2) Toute application linéaire $d_E: E \rightarrow C \otimes E$ définit de manière évidente une application linéaire $d_E^1: E \otimes E' \rightarrow C$. Lorsque E est un K -module projectif de type fini, l'application $d_E \mapsto d_E^1$ est un isomorphisme de $\text{Hom}(E, C \otimes E)$ sur $\text{Hom}(E \otimes E', C)$. Or $E \otimes E' = \text{End}(E)$ a une structure naturelle de cogèbre, cf. n° 1.1, Exemple 4). On peut vérifier (cf. exercice 1) que d_E vérifie les axiomes (1) et (2) si et seulement si d_E^1 est