§1. Cogèbres et comodules (généralités)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

On note Alg_K la catégorie des anneaux commutatifs K_1 munis d'un morphisme $K \to K_1$.

L'application identique d'un ensemble X est notée 1_X (ou simplement 1 si aucune confusion sur X n'est à craindre).

§1. Cogèbres et comodules (généralités)

1.1. Cogèbres

Dans tout ce paragraphe, C désigne une *cogèbre,* de coproduit d, possédant une co-unité (à droite et à gauche) e. Rappelons (cf. *Alg.* III) ce que cela signifie:

C est un module (sur K);

d est une application linéaire de C dans $C \otimes C$;

e est une forme linéaire sur C.

De plus, ces données vérifient les axiomes suivants:

(C_1) (Coassociativité) Les applications linéaires $(1_C \otimes d) \circ d$ et $(d \otimes 1_C) \circ d$ de C dans $C \otimes C \otimes C$ coïncident.

(C_2) (Co-unité) $(1_C \otimes e) \circ d = 1_C$ et $(e \otimes 1_C) \circ d = 1_C$.

Exemples

(1) Soit C une cogèbre de co-unité e. En composant le coproduit de C avec la symétrie canonique de $C \otimes C$, on obtient une seconde structure de cogèbre sur C, dite *opposée* de la première. On la note C^o; la co-unité de C^o est e.

(2) Toute somme directe de cogèbres a une structure naturelle de cogèbre. En particulier, 0 est une cogèbre.

(3) Supposons que C soit projectif de type fini (comme K-module), et soit A son dual. Comme le dual de $C \otimes C$ s'identifie à $A \otimes A$, toute structure de cogèbre sur C correspond à une structure d'*algèbre associative* sur A, et réciproquement. Pour que $e \in A$ soit co-unité de C, il faut et il suffit que ce soit un élément unité (à gauche et à droite) pour A.

(Lorsque K est un corps, on verra plus loin que toute cogèbre est limite inductive de cogèbres obtenues par ce procédé.)

(4) Soit V un module projectif de type fini. Soit

$$C = \mathrm{End}(V) = V \otimes V' .$$

La forme bilinéaire $\mathrm{Tr}(uv)$ met C en dualité avec lui-même; appliquant la méthode de l'exemple précédent, on voit que la structure d'algèbre de C définit par dualité une structure de *cogèbre* sur C, de co-unité la trace $\mathrm{Tr}: C \to K$. En particulier $M_n(K)$ a une structure de cogèbre canonique, pour laquelle on a

$$d(E_{ij}) = \sum_k E_{kj} \otimes E_{ik} .$$

(La cogèbre *opposée* est plus sympathique, cf. exercice 1.)

(5) Soient C_1 et C_2 deux cogèbres, de coproduits d_1 et d_2 et de co-unités e_1 et e_2. Soit σ l'isomorphisme canonique de $C_2 \otimes C_1$ sur $C_1 \otimes C_2$; le composé

$$(1_{C_1} \otimes \sigma \otimes 1_{C_2}) \circ (d_1 \otimes d_2)$$

munit $C_1 \otimes C_2$ d'une structure de cogèbre, dite *produit tensoriel* de celles de C_1 et C_2; elle admet pour co-unité $e_1 \otimes e_2$.

(6) L'algèbre affine d'un schéma en monoïdes affine sur K a une structure naturelle de cogèbre, cf. n° 3.1.

1.2. Comodules

Définition 1. *On appelle comodule (à gauche) sur C tout module E muni d'une application linéaire $d_E: E \to C \otimes E$ vérifiant les axiomes suivants:*

(1) *Les applications linéaires $(d \otimes 1_E) \circ d_E$ et $(1_C \otimes d_E) \circ d_E$ de E dans $C \otimes C \otimes E$ coïncident.*

(2) $(e \otimes 1_E) \circ d_E = 1_E$.

L'application d_E s'appelle le *coproduit* de E; on se permet souvent de le (la) noter d.

Remarques

1) Il y a une notion analogue de comodule *à droite*; on laisse au lecteur le soin de l'expliciter (ou de remplacer la cogèbre C par son opposée C^o). [Le rédacteur s'est aperçu trop tard qu'il était plus commode d'échanger droite et gauche, i.e. d'appeler «comodules à droite» ceux de la définition 1.]

2) Toute application linéaire $d_E: E \to C \otimes E$ définit de manière évidente une application linéaire $d_E^1: E \otimes E' \to C$. Lorsque E est un K-module projectif de type fini, l'application $d_E \mapsto d_E^1$ est un isomorphisme de $\mathrm{Hom}(E, C \otimes E)$ sur $\mathrm{Hom}(E \otimes E', C)$. Or $E \otimes E' = \mathrm{End}(E)$ a une structure naturelle de cogèbre, cf. n° 1.1, Exemple 4). On peut vérifier (cf. exercice 1) que *d_E vérifie les axiomes* (1) *et* (2) *si et seulement si d_E^1 est*

un morphisme de la cogèbre opposée $\mathrm{End}(E)^o$ *à* $\mathrm{End}(E)$ *dans la cogèbre* C, *compatible avec les co-unités.*

3) Supposons que E soit *libre* de base $(v_i)_{i \in I}$. Une application linéaire $d_E: E \to C \otimes E$ est alors définie par une famille c_{ij}, $i, j \in I$, d'éléments de C telle que $d_E(v_i) = \sum_{j \in I} c_{ij} \otimes v_j$ (pour i fixé, c_{ij} doit être nul pour presque tout j). Les conditions (1) et (2) de la définition 1 se traduisent alors par les formules:

$$(1') \quad d(c_{ij}) = \sum_{k \in I} c_{ik} \otimes c_{kj} \qquad \text{pour} \quad i, j \in I$$

$$(2') \quad e(c_{ij}) = \delta_{ij} \qquad \text{pour} \quad i, j \in I .$$

(Lorsque I est *fini*, cet exemple peut être considéré comme un cas particulier du précédent.)

Exemples de comodules

1) Le module C, muni de d, est un comodule (à gauche et à droite).

2) La somme directe d'une famille de comodules a une structure naturelle de comodule.

3) Si E est un comodule, et V un K-module quelconque, le couple $(E \otimes V, d_E \otimes 1_V)$ est un comodule, noté simplement $E \otimes V$.

4) Les notations étant celles de l'exemple 5) du n° 1.1, soient E_1 un comodule sur C_1 et E_2 un comodule sur C_2. Soit τ l'isomorphisme canonique de $E_1 \otimes C_2$ sur $C_2 \otimes E_1$; l'application

$$(1_{C_1} \otimes \tau \otimes 1_{E_2}) \circ (d_{E_1} \otimes d_{E_2})$$

munit $E_1 \otimes E_2$ d'une structure de comodule sur $C_1 \otimes C_2$.

5) Si G est un schéma en monoïdes affine sur K, et C la bigèbre correspondante (cf. n° 3.1), la notion de comodule sur C coïncide avec celle de *représentation linéaire de* G (ou G-module), cf. n° 3.2, ainsi que SGAD, exposé I.

DÉFINITION 2. *Soient* E_1 *et* E_2 *deux comodules. On appelle* C*-morphisme (ou simplement morphisme) de* E_1 *dans* E_2 *toute application linéaire* $f: E_1 \to E_2$ *telle que*

$$(*) \qquad (1_C \otimes f) \circ d_{E_1} = d_{E_2} \circ f .$$

Les C-morphismes de E_1 dans E_2 forment un sous-K-module de $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$; on le note $\mathrm{Hom}^C(E_1, E_2)$.

On note Com_C la catégorie des C-comodules (à gauche); l'addition des C-morphismes munit Com_C d'une structure de *catégorie additive.*

1.3. UNE FORMULE D'ADJONCTION

On conserve les notations précédentes. Soit V un K-module; d'après le n° 1.2, Exemples 1 et 3, on a une structure naturelle de comodule sur $C \otimes V$, le coproduit correspondant étant $d \otimes 1_V$.

Soit d'autre part E un comodule. Définissons une application linéaire

$$\theta : \mathrm{Hom}(E, V) \to \mathrm{Hom}^C(E, C \otimes V)$$

par

$$\theta(g) = (1_C \otimes g) \circ d_E , \quad \text{si} \quad g \in \mathrm{Hom}(E, V) .$$

Cela a un sens, car d_E est un morphisme de E dans $C \otimes E$, et $1_C \otimes g$ est un morphisme de $C \otimes E$ dans $C \otimes V$.

PROPOSITION 1. *L'application* $\theta : \mathrm{Hom}(E, V) \to \mathrm{Hom}^C(E, C \otimes V)$ *est un isomorphisme.*

Soit $f : E \to C \otimes V$ un morphisme. En composant f avec $e \otimes 1_V$: $C \otimes V \to V$, on obtient un élément $\varepsilon(f)$ de $\mathrm{Hom}(E, V)$. On a ainsi défini une application linéaire

$$\varepsilon : \mathrm{Hom}^C(E, C \otimes V) \to \mathrm{Hom}(E, V)$$

et il suffit de prouver que θ et ε sont inverses l'un de l'autre. Tout d'abord, si $g \in \mathrm{Hom}(E, V)$, on a:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\theta(g)) &= (e \otimes 1_V) \circ \theta(g) = (e \otimes 1_V) \circ (1_C \otimes g) \circ d_E \\ &= (e \otimes g) \circ d_E = g \circ (e \otimes 1_E) \circ d_E \\ &= g \circ 1_E = g , \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\varepsilon \circ \theta = 1$.
D'autre part, si $f \in \mathrm{Hom}^C(E, C \otimes V)$, on a:

$$\begin{aligned} \theta(\varepsilon(f)) &= (1_C \otimes \varepsilon(f)) \circ d_E = (1_C \otimes ((e \otimes 1_V) \circ f)) \circ d_E \\ &= (1_C \otimes e \otimes 1_V) \circ (1_C \otimes f) \circ d_E \\ &= (1_C \otimes e \otimes 1_V) \circ (d \otimes 1_V) \circ f \\ &= (((1_C \otimes e) \circ d) \otimes 1_V) \circ f \\ &= (1_C \otimes 1_V) \circ f = f , \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\theta \circ \varepsilon = 1$, cqfd.

[Ce qui précède est un bon exemple d'un principe général: tout calcul relatif aux cogèbres est trivial et incompréhensible.]

Exemples

1) Prenons $V = E$ et $g = 1_E$; l'élément correspondant de $\mathrm{Hom}^C(E, C \otimes E)$ est le coproduit $d_E : E \to C \otimes E$.

2) Prenons $V = K$. On obtient une bijection $\theta : E' \to \mathrm{Hom}^C(E, C)$. La bijection réciproque associe à tout morphisme $f : E \to C$ la forme linéaire $e \circ f$.

1.4. Conséquences d'une hypothèse de platitude

A partir de maintenant, on suppose que C est *plat* (comme K-module). Si V est un sous-module d'un module W, on identifie $C \otimes V$ au sous-module correspondant de $C \otimes W$, et $C \otimes (W/V)$ à $(C \otimes W)/(C \otimes V)$.

Définition 3. *Soit E un C-comodule, et soit V un sous-module de E. On dit que V est stable par C (ou que c'est un sous-comodule de E) si d_E applique V dans $C \otimes V$.*

Si tel est le cas, on vérifie tout de suite que l'application $d_V : V \to C \otimes V$ induite par d_E fait de V un comodule (d'où la terminologie); on définit de même le comodule quotient E/V.

Exemples

1) Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille de sous-modules du comodule E. Si les V_i sont stables par C, il en est de même de $\sum_{i \in I} V_i$ (resp. de $\bigcap_{i \in I} V_i$ lorsque I est fini). Cela résulte des formules:

$$C \otimes (\sum V_i) = \sum (C \otimes V_i)$$

et

$$C \otimes (\bigcap V_i) = \bigcap (C \otimes V_i), \quad I \text{ fini},$$

cf. *Alg. Comm.*, chap. I, §2.

2) Si E est un comodule, le morphisme $d_E : E \to C \otimes E$ *identifie E à un sous-comodule de $C \otimes E$* (muni du coproduit $d \otimes 1_E$, cf. n° 1.3). On notera que ce sous-comodule est même *facteur direct* dans $C \otimes E$ comme K-module (mais pas en général comme comodule), en vertu de la formule (2) de la définition 1.

Proposition 2. *Soit $f : E_1 \to E_2$ un morphisme de comodules. Alors* $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont stables par C; de plus, f définit par passage au quotient un isomorphisme du comodule $E_1/\mathrm{Ker}(f)$ sur le comodule* $\mathrm{Im}(f)$.

Puisque C est plat, $C \otimes \mathrm{Ker}(f)$ est le noyau de $1_C \otimes f$ et $C \otimes \mathrm{Im}(f)$ en est l'image. On en déduit aussitôt que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par C. Le fait que f définisse un isomorphisme de $E_1/\mathrm{Ker}(f)$ sur $\mathrm{Im}(f)$ est immédiat.

COROLLAIRE 1. *La catégorie* Com_C *est une catégorie abélienne et le foncteur «module sous-jacent» est exact.*

C'est clair.

Remarque. Il est non moins clair que le foncteur «module sous-jacent» commute aux limites projectives finies et aux limites inductives quelconques.

COROLLAIRE 2. *Si* V *est un K-module injectif, le comodule* $C \otimes V$ *est injectif dans* Com_C.

En effet, la proposition 1 montre que le foncteur

$$E \mapsto \mathrm{Hom}^C(E, C \otimes V)$$

est exact.

PROPOSITION 3. *Soit* V *un sous-module d'un comodule* E, *et soit* V^o *l'ensemble des éléments* $x \in E$ *tels que* $d_E(x)$ *appartienne à* $C \otimes V$. *Alors* V^o *est un sous-comodule de* E; *c'est le plus grand sous-comodule de* E *contenu dans* V.

Il faut d'abord prouver que V^o est stable par C, i.e. que d_E applique V^o dans $C \otimes V^o$. Or V^o est défini comme le noyau de l'homomorphisme $E \to C \otimes E \to C \otimes (E/V)$, la première flèche étant d_E. Puisque C est plat, il s'ensuit que $C \otimes V^o$ est le noyau de l'homomorphisme

$$C \otimes E \to C \otimes C \otimes E \to C \otimes C \otimes (E/V)\ ,$$

la première flèche étant $1_C \otimes d_E$. Pour prouver que $d_E(V^o)$ est contenu dans $C \otimes V^o$, il suffit donc de vérifier que le composé

$$V^o \to C \otimes E \to C \otimes C \otimes E \to C \otimes C \otimes (E/V)$$

est nul. Mais, d'après l'axiome (1) de la déf. 1, le composé $(1_C \otimes d_E) \circ d_E$ est égal à $(d \otimes 1_E) \circ d_E$. Or d_E applique V^o dans $C \otimes V$ par construction; l'image de V^o dans $C \otimes C \otimes E$ est donc contenue dans $(d \otimes 1_E)(C \otimes V)$, donc dans $C \otimes C \otimes V$, et son image dans $C \otimes C \otimes (E/V)$ est bien nulle.

D'autre part, l'axiome (2) de la déf. 1 montre que V^o est contenu dans $(e \otimes 1_E)(C \otimes V)$, donc dans V. Enfin, il est clair que tout sous-comodule de E contenu dans V est contenu dans V^o, cqfd.

Nous dirons qu'un comodule est de *type fini* (resp. libre, projectif, ...) si c'est un K-module de type fini (resp. un K-module libre, un K-module projectif, ...).

COROLLAIRE. *Supposons K noethérien. Tout comodule E est alors réunion filtrante croissante de ses sous-comodules de type fini.*

Il suffit évidemment de prouver ceci: si W est un sous-module de type fini de E, il existe un sous-comodule de E, qui est de type fini et contient W. Or $d_E(W)$ est un sous-module de type fini de $C \otimes E$. On peut donc trouver un sous-module V de type fini de E tel que $C \otimes V$ contienne $d_E(W)$. Soit V^o l'ensemble des $x \in E$ tels que $d_E(x) \in C \otimes V$. D'après la proposition, V^o est un sous-comodule de E contenu dans V, donc de type fini (puique K est noethérien). Il est clair que V^o contient W, cqfd.

§2. COGÈBRES SUR UN CORPS

A partir de maintenant, l'anneau de base K est un *corps*.

2.1. SOUS-COGÈBRES

Soit C une cogèbre sur K, de coproduit d et de co-unité e.

DÉFINITION 1. *Un sous-espace vectoriel X de C est appelé une sous-cogèbre de C si $d(X)$ est contenu dans $X \otimes X$.*

S'il en est ainsi, l'application linéaire $d_X: X \to X \otimes X$ induite par d munit X d'une structure de cogèbre, ayant pour co-unité la restriction de e à X.

Exemples

1) Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-cogèbres de C, la somme des X_i et l'intersection des X_i sont des sous-cogèbres de C. Cela se vérifie au moyen des formules:

$$\sum (X_i \otimes X_i) \subset (\sum X_i) \otimes (\sum X_i)$$
$$\cap (X_i \otimes X_i) = (\cap X_i) \otimes (\cap X_i) .$$