3. Relations d'intersection

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

3. Relations d'intersection

On utilise les notations du paragraphe précédent. On fixe une «origine» a dans $S^1 - \tilde{X}$; on rappelle que le choix de a détermine une relation d'ordre total sur $S^1 - \{a\}$ et sur X. On décrit dans ce paragraphe certaines relations entre les entiers $e(x, y)$ et $\varepsilon_x(s_a)$ qui joueront un rôle crucial dans le prochain paragraphe.

3.1. Soit x un point de X. Soit D un petit disque fermé de $\mathbf{R}^2$ de centre x; on note I_1 et I_2 les deux composantes connexes de $S^1 - \alpha^{-1}(D - \partial D)$. Le point a se trouve à l'intérieur de l'une de ces composantes, disons I_1. On considère maintenant S^1 plongé de façon standard dans $\mathbf{R}^2$ et on note C_i, $i = 1, 2$, la réunion de I_i et du segment J_i joignant les deux extrémités de I_i (voir figure 7). On note encore $\alpha: C_i \to \mathbf{R}^2$ le prolongement affine de $\alpha_{|I_i}$; on observe que $\alpha(J_1)$ et $\alpha(J_2)$ ne se rencontrent pas. La 0-chaîne

$$\sum_{y \in X, y < x} e(x, y)\, \varepsilon_y(s_a)\, y - \sum_{y \in X, y > x} e(x, y)\, \varepsilon_y(s_a)\, y$$

représente dans $H_0(\mathbf{R}^2; \mathbf{Z})$ l'intersection des deux cercles «immergés» $\alpha(C_1)$ et $\alpha(C_2)$; on a donc la relation suivante:

$$\sum_{y \in X, y < x} e(x, y)\, \varepsilon_y(s_a) = \sum_{y \in X, y > x} e(x, y)\, \varepsilon_y(s_a)\ . \tag{3.1}$$

3.2. Soient maintenant x et y deux points de X avec $e(x, y) = 0$ et $x < y$. On pose $\alpha^{-1}(x) = \{\xi, \xi^*\}$ et $\alpha^{-1}(y) = \{\eta, \eta^*\}$ avec $\xi < \xi^*$ et $\eta < \eta^*$. On a dans $S^1 - \{a\}$ deux configurations possibles:

1) $\xi < \eta < \eta^* < \xi^*$;

2) $\xi < \xi^* < \eta < \eta^*$.

Premier cas (figure 8).

En considérant l'intersection de $\alpha(C_1)$ et $\alpha(C_2)$ on obtient:

$$\sum_{z \in X, z < x} e(x, z)\, e(y, z)\, \varepsilon_z(s_a) = \sum_{z \in X, z > y} e(x, z)\, e(y, z)\, \varepsilon_z(s_a)\ .$$

On observe également que pour $x < z < y$ on a $e(x, z)\, e(y, z) = 0$.

Deuxième cas (figure 9).

En considérant l'intersection de $\alpha(C_1)$ et $\alpha(C_2)$ on obtient cette fois:

$$\sum_{z \in X, x < z < y} e(x, z)\, e(y, z)\, \varepsilon_z(s_a) = 0$$

et l'on observe que pour $z < x$ ou $z > y$ on a $e(x, z)\, e(y, z) = 0$.

Supposons encore $x < y$ mais ne supposons plus $e(x, y) = 0$, il résulte de ce qui précède que l'on a dans tous les cas les relations suivantes:

$$\text{(3.2.1)} \qquad \begin{aligned} &\sum_{z \in X,\, z < x} (1 - e(x, y))\, e(x, z)\, e(y, z)\, \varepsilon_z(s_a) \\ &= \sum_{z \in X,\, z > y} (1 - e(x, y))\, e(x, z)\, e(y, z)\, \varepsilon_z(s_a)\ ; \end{aligned}$$

$$\text{(3.2.2)} \qquad \sum_{z \in X,\, x < z < y} (1 - e(x, y))\, e(x, z)\, e(y, z)\, \varepsilon_z(s_a) = 0\ .$$

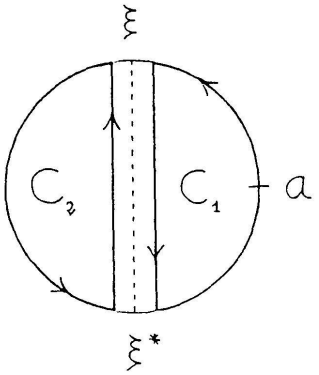


FIGURE 7

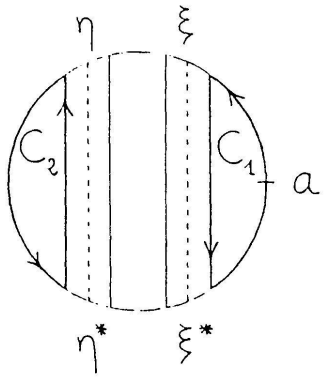


FIGURE 8

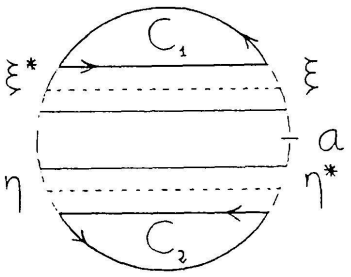


FIGURE 9

4. EXPRESSION DES INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 3 EN TERMES DE POINTS DE CROISEMENT

Soient $f: \mathcal{N} \to A$ un invariant des nœuds et α une immersion générique de S^1 dans $\mathbf{R}^2$. On note encore abusivement $f: S = S(\alpha) \to A$ l'application induite par l'invariant f. On continue à utiliser les notations du paragraphe 2.

4.1. INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 1

PROPOSITION 4.1. *Tout invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 1 est nul. (Rappelons que nous supposons qu'un invariant est nul sur le nœud trivial.)*

Démonstration. Soient $f: \mathcal{N} \to A$ un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 1 et α une immersion générique de S^1 dans $\mathbf{R}^2$. On fixe une origine a dans $S^1 - \tilde{X}$. L'application $f: S = S(\alpha) \to A$, qui est de degré inférieur ou égal à 1, est de la forme:

$$f(s) = c_\varnothing + \sum_{x \in X} \delta_{s_a, x}(s)\, c_x$$

(notations du paragraphe 2). Le coefficient $c_\varnothing = f(s_a)$ est nul; on montre qu'il en est de même pour les coefficients c_x de la façon suivante. Soient s_1