1. Invariants de Vassiliev de degré fini (d'après Vassiliev, Birman et Lin, Bar-Natan)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

1. Invariants de Vassiliev de degré fini (d'après Vassiliev, Birman et Lin, Bar-Natan)

Dans ce paragraphe nous résumons très brièvement cette théorie et nous en extrayons l'énoncé élémentaire 1.5 qui sera utilisé au paragraphe 4.

Nous appelons invariant des nœuds une application $f: \mathcal{N} \to A$, définie sur l'ensemble $\mathcal{N}$ des classes d'isotopie de plongements de S^1 dans $\mathbf{R}^3$ et à valeurs dans un groupe abélien A, telle que l'image du nœud trivial soit nulle.

Nous appelons nœud singulier une immersion $\psi: S^1 \to \mathbf{R}^3$ vérifiant les propriétés suivantes (voir figures 3, 4, 5 et 6):

— ψ admet comme seules «singularités» des points doubles en nombre fini;

— en un point double les deux tangentes à $\psi(S^1)$ sont distinctes.

On «désingularise» ψ en écartant en chaque point double les deux brins de $\psi(S^1)$; à isotopie près on obtient ainsi 2^m plongements $\varphi: S^1 \to \mathbf{R}^3$, m désignant le nombre de points doubles de ψ. Soit x un de ces points doubles, on définit $\varepsilon_x(\varphi) = \pm 1$ de la façon suivante. On pose $\psi^{-1}(x) = \{\xi, \xi^*\}$ et on prend pour signe de $\varepsilon_x(\varphi)$ celui du déterminant $\det(\psi'(\xi), \psi'(\xi^*), \varphi(\xi) - \varphi(\xi^*))$ (on identifie ici S^1 avec $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et ψ avec une application $\mathbf{Z}$-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^3$, ψ' désigne alors la dérivée de ψ).

On étend l'invariant f aux nœuds singuliers en posant:

$$f(\psi) = \sum_{\varphi} \left(\prod_x \varepsilon_x(\varphi)\right) f(\varphi) \,. \tag{1.1}$$

Cette extension satisfait la formule de récurrence symbolique:

$f($  $) = f($  $) - f($  $)$.

Exemples

On considère les nœuds singuliers des figures 3, 4, 5 et 6. On note T le nœud de trèfle, H le nœud de huit (figures 1 et 2), et K^* l'image dans un miroir d'un nœud K (le nœud obtenu à partir de K par composition au but avec un difféomorphisme de $\mathbf{R}^3$ renversant l'orientation). On obtient:

— $f(K_1) = f(T)$;

— $f(K_2) = f(T) - f(T^*)$;

— $f(K_3) = f(T) + f(H)$;

— $f(K_4) = f(T) + f(T^*) + f(H) + f(H^*)$ ou encore puisque H et H^* coïncident $f(K_4) = f(T) + f(T^*) + 2f(H)$.

On observe que l'on a:

$$f(K_4) = 2f(K_3) - f(K_2) \,. \tag{1.2}$$

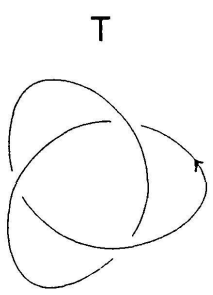


FIGURE 1

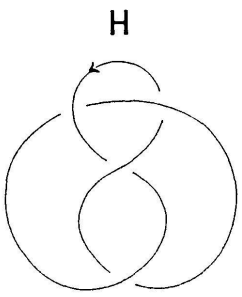


FIGURE 2

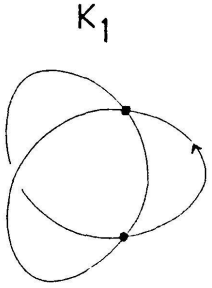


FIGURE 3

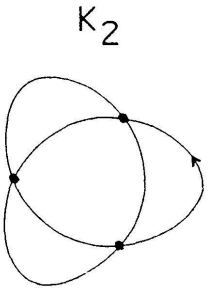


FIGURE 4

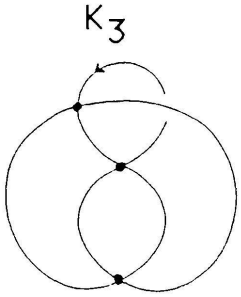


FIGURE 5

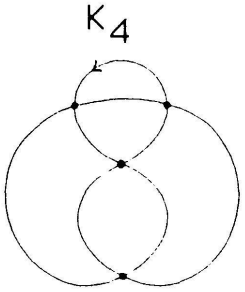


FIGURE 6

DÉFINITION 1.3. *Soit m un entier, on dit qu'un invariant $f: \mathcal{N} \to A$ est (un invariant de Vassiliev) de degré inférieur ou égal à m si $f(\psi)$ est nul pour tout nœud singulier ψ dont le nombre de points doubles est strictement supérieur à m. (On dit qu'il est de degré m s'il est de degré inférieur ou égal à m sans être de degré inférieur ou égal à $m-1$.)*

FONCTIONS DE POIDS

Soit ψ un nœud singulier à m points doubles. L'ensemble des points doubles *à la source* est un sous-ensemble de $2m$ points de S^1, muni d'une involution sans points fixes. Les classes d'isotopie de tels sous-ensembles sont appelées des diagrammes à m cordes; l'ensemble (fini) des diagrammes à m cordes est noté $\mathcal{D}_m$. Soit $f: \mathcal{N} \to A$ un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à m. On se convainc sans peine que $f(\psi)$ ne dépend que du diagramme à m cordes défini par ψ. On associe de la sorte à l'invariant f une application $W_f: \mathcal{D}_m \to A$. On vérifie que W_f satisfait deux systèmes de relations linéaires. Le premier correspond à l'énoncé 1.4 ci-dessous; pour le second, constitué des relations dites des 4 termes, voir par exemple [Ba] (dans le cas $m = 3$ ces relations sont conséquence de (1.2) et (1.4)). Les applications de $\mathcal{D}_m$ dans A vérifiant ces deux systèmes sont appelées des fonctions de poids de degré m. La partie difficile de la théorie est de montrer que l'application $f \mapsto W_f$ est surjective (au moins pour $A = \mathbf{R}$, théorème de Kontsevitch).

Dans cette note nous traitons «élémentairement» le cas $m \leqslant 3$.

Nous dirons que deux points doubles (au but) x et y de ψ sont enlacés si les 0-sphères $\psi^{-1}(x)$ et $\psi^{-1}(y)$ sont enlacés dans S^1.

PROPOSITION 1.4. *Soient ψ un nœud singulier à m points doubles et f un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à m. S'il existe un point double de ψ qui n'est enlacé avec aucun autre alors $f(\psi)$ est nul.*

Pour une démonstration voir par exemple [Ba].

Soit maintenant ψ un nœud singulier à 2 ou 3 points doubles. Quand ψ a 2 points doubles nous posons $W_2(\psi) = 1$ si ces deux points doubles sont enlacés et $W_2(\psi) = 0$ sinon. Quand ψ a 3 points doubles nous posons $W_3(\psi) = \sup(N-1, 0)$, N désignant le nombre de paires de points doubles enlacés.

La proposition 1.4 et les calculs d'invariants de nœuds singuliers que nous avons donné ci-dessus comme exemples conduisent à l'énoncé suivant:

PROPOSITION 1.5. (a) *La valeur d'un invariant de Vassiliev f de degré inférieur ou égal à 2 sur un nœud singulier ψ à 2 points doubles est donnée par*

$$f(\psi) = W_2(\psi)\, f(T) .$$

(b) *La valeur d'un invariant de Vassiliev f de degré inférieur ou égal à 3 sur un nœud singulier ψ à 3 points doubles est donnée par*

$$f(\psi) = W_3(\psi)\, (f(T) + f(H)) .$$

2. FORMALISME RELATIF AUX NŒUDS DE $\mathbf{R}^3$ AU-DESSUS D'UNE IMMERSION GÉNÉRIQUE DE S^1 DANS $\mathbf{R}^2$

On reprend le formalisme de [La].

Soit $\alpha: S^1 \to \mathbf{R}^2$ une immersion générique. On note respectivement $\tilde{X}$ et X l'ensemble des points doubles de α à la source et au but. La restriction de $\alpha: \tilde{X} \to X$ est un revêtement (trivial) à deux feuillets dont l'ensemble des sections est noté S. Quand nous serons amenés à faire varier α, nous préciserons ces notations en $\tilde{X}(\alpha)$, $X(\alpha)$, $S(\alpha)$. L'ensemble S est un espace affine sous l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties de X vu comme un $\mathbf{Z}/2$-espace vectoriel: la différence entre deux sections s et s' est la partie $\{x; s(x) \neq s'(x)\}$. Nous nous autorisons par la suite à identifier $\mathscr{P}(X)$ avec $\{0, 1\}^X$ (alors que l'on préférait considérer $(\mathbf{Z}/2)^X$ dans [La]) ou avec le $\mathbf{Z}/2$-espace vectoriel de