5. Algèbre enveloppante (cf. [L-P]).

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Il est clair que pour toute algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ le noyau $\mathfrak{g}^{\mathrm{ann}}$ (*cf.* 2.1) est une représentation de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}$. C'est une représentation antisymétrique.

Une représentation M de $\mathfrak{g}$ est dite *triviale* si elle est à la fois symétrique et antisymétrique, c'est-à-dire

$$[x, m] = 0 = [m, x] \quad \text{pour tout} \quad m \in M, x \in \mathfrak{g} .$$

4.4. *Coreprésentations.* Dans l'analogie avec les algèbres associatives, les représentations sont l'analogue des modules à droite (voir ci-dessous thm 5.2). La notion duale, c'est-à-dire l'analogue des modules à gauche, est celle de coreprésentation.

Par définition une *coreprésentation* N de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ est la donnée d'un k-module et de deux actions $[-,-]: \mathfrak{g} \times N \to N$ et $[-,-]: N \times \mathfrak{g} \to N$ vérifiant les axiomes suivants

$$(MLL)' \qquad [[x, y], m] = [x, [y, m]] - [y, [x, m]]$$

$$(LML)' \qquad [[y, [m, x]] = [[y, m], x] - [m, [x, y]]$$

$$(LLM)' \qquad [[m, x], y] = [m, [x, y]] - [[y, m], x] ,$$

pour tout $m \in N$ et tout $x, y \in \mathfrak{g}$.

Notons que les deux dernières relations impliquent la relation

$$(ZD)' \qquad [y, [m, x]] + [[m, x], y] = 0 .$$

Il est clair que toute représentation d'une algèbre de Lie définit à la fois une représentation et une coreprésentation au sens des algèbres de Leibniz.

Le *produit tensoriel* d'une coreprésentation N et d'une représentation M est le quotient de $N \otimes_k M$ par les relations

$$[n, x] \otimes m \sim n \otimes [x, m] \quad \text{et} \quad [x, n] \otimes m \sim n \otimes [m, x]$$

pour tout $x \in \mathfrak{g}, n \in N$ et $m \in M$.

5. Algèbre enveloppante (*cf.* [L-P]).

La catégorie des représentations d'une algèbre de Leibniz donnée $\mathfrak{g}$ est une catégorie abélienne. Il est naturel d'essayer de la représenter comme une catégorie de modules sur une certaine algèbre, appelée algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$.

On construit cette algèbre enveloppante de la façon suivante. Considérons deux copies de $\mathfrak{g}$ notées $\mathfrak{g}^l$ et $\mathfrak{g}^r$ pour les différencier. Les éléments de $\mathfrak{g}^l$ sont notés l_x, ceux de $\mathfrak{g}^r$ sont notés r_x, pour tout $x \in \mathfrak{g}$. Rappelons que pour tout k-module V, $T(V)$ désigne l'algèbre tensorielle $k \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \ldots$, qui est associative et unitaire. Dans $T(\mathfrak{g}^l \oplus \mathfrak{g}^r)$ on considère l'idéal bilatère I engendré par les éléments

$$\begin{cases} \text{(i)} & r_{[x,y]} - (r_x r_y - r_y r_x) \\ \text{(ii)} & l_{[x,y]} - (l_x r_y - r_y l_x) \\ \text{(iii)} & (r_y + l_y) l_x \end{cases}$$

pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$.

5.1. Par définition l'*algèbre enveloppante* $UL(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ est le quotient

$$UL(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g}^l \oplus \mathfrak{g}^r)/I .$$

5.2. THÉORÈME (*cf.* [L-P]). *La catégorie des représentations (resp. coreprésentations) de l'algèbre de Leibniz* $\mathfrak{g}$ *est équivalente à la catégorie des modules à droite (resp. à gauche) sur* $UL(\mathfrak{g})$.

Il existe plusieurs homomorphismes permettant de comparer $UL(\mathfrak{g})$ à l'algèbre enveloppante, au sens des algèbres de Lie, de $\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}$. Tout d'abord les homomorphismes d'algèbres d_0, d_1: $UL(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}})$ induits par

$$\begin{cases} d_0(l_x) = 0 \\ d_0(r_x) = \bar{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1(l_x) = -\bar{x} \\ d_1(r_x) = \bar{x} \end{cases}$$

sont bien définis, puis, dans l'autre sens, l'homomorphisme s_0: $U(\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}) \to UL(\mathfrak{g})$, induit par $s_0(\bar{x}) = r_x$.

5.3. PROPOSITION (*cf.* [L-P]). *Les homomorphismes* d_0, d_1, s_0 *ci-dessus vérifient*

$$d_0 s_0 = d_1 s_0 = \mathrm{id} \quad \textit{et} \quad (\operatorname{Ker} d_1)(\operatorname{Ker} d_0) = 0 .$$

5.4. *Exemple.* Soit $V = k \,.\, x$ un module libre de rang 1 sur k engendré par x. L'algèbre de Leibniz libre $\mathscr{L}(V)$ est isomorphe à $k \,.\, x \oplus k \,.\, x^2 \oplus \cdots \oplus k \,.\, x^n \oplus \cdots$ équipé du crochet

$$\begin{cases} [x, x^i] = x^{i+1} \\ [x^j, x^i] = 0 \quad \text{si } j > 1 . \end{cases}$$

Notons que $\mathscr{L}(V)_{\mathrm{Lie}}$ est l'algèbre de Lie libre sur un générateur, i.e. isomorphe à $k \,.\, x$ (l'application quotient envoie x^j sur 0, pour $j > 1$). L'algèbre enveloppante (au sens Lie) de $\mathscr{L}(V)_{\mathrm{Lie}} = k\,.\,x$ est l'algèbre de polynômes $k[x]$.

L'algèbre enveloppante (au sens Leibniz) de $\mathscr{L}(V)$ est isomorphe à l'algèbre quotient de polynômes non commutatifs $k\langle x, y\rangle/\{xy = 0\}$. (Poser $r_x + l_x = x$, $l_x = -y$). Les applications d_0, d_1 et s_0 sont données par

$$\begin{cases} d_0(x) = x \\ d_0(y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1(x) = 0 \\ d_1(y) = x \end{cases}$$

et $s_0(x) = x + y$.

5.5. *Poincaré-Birkhoff-Witt.* On peut faire un traitement de UL en tous points analogue à celui de U: filtration, théorème de *PBW,* algèbre enveloppante d'un produit, etc. (*cf.* [L-P] pour *PBW*).

6. Cohomologie et homologie d'une algèbre de Leibniz (*cf.* [L1], [C], [L-P])

Historiquement la notion d'algèbre de Leibniz est apparue de la façon suivante. On sait que le calcul de l'homologie (à coefficients triviaux) d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ peut se faire à partir d'un complexe (de Chevalley-Eilenberg) dont l'espace des n-chaînes est $\Lambda^n\mathfrak{g}$ (produit extérieur n fois). J'ai montré, premièrement, que l'on pouvait relever l'opérateur bord $d\colon \Lambda^n\mathfrak{g} \to \Lambda^{n-1}\mathfrak{g}$ en un opérateur bord $\tilde{d}\colon \mathfrak{g}^{\otimes n} \to \mathfrak{g}^{\otimes n-1}$, et, deuxièmement, que la démonstration de $\tilde{d}^2 = 0$ n'utilise que l'identité de Leibniz du crochet. Moralité: le nouveau complexe est encore bien défini pour n'importe quelle algèbre de Leibniz.

En fait on va voir que l'on peut définir plus généralement des groupes d'homologie d'une algèbre de Leibniz à coefficients dans une coreprésentation et des groupes de cohomologie à valeurs dans une représentation. Ces groupes peuvent s'interpréter en termes de foncteurs dérivés (Tor et Ext respectivement) grâce à l'algèbre enveloppante $UL(\mathfrak{g})$.

6.1. *Cohomologie d'une algèbre de Leibniz.* Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz et M une représentation de $\mathfrak{g}$. Le n-ième module des cochaînes de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M est

$$C^n(\mathfrak{g}, M) := \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}^{\otimes n}, M),\ n \geqslant 0\ .$$

On définit un opérateur $d\colon C^n(\mathfrak{g}, M) \to C^{n+1}(\mathfrak{g}, M)$ par