§3. More questions on $\delta(x^n)$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Now let $x > 1$ be a rational number which is not an integer. Suppose

$$\sup_n \delta(x^n) < \infty$$

Then for some k

$$E(x) \subset A_{2k}$$

hence

$$E^{(k+1)}(x) = \varnothing \ .$$

Assuming a positive answer to Problem 1, we conclude that x is a Pisot number, i.e. a rational integer. This contradicts the assumption hence

$$\sup_n \delta(x^n) = \infty \ . \qquad QED$$

§3. More questions on $\delta(x^n)$

H. Heilbronn [7], T. Tonkov [15] and finally J.W. Porter [13] improving on one another established that as a tends to infinity

$$\frac{1}{\varphi(a)} \sum_{\substack{b<a \\ (a,b)=1}} \delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{12}{\pi^2} \ln 2 \ln a + O(1) \ .$$

Independtly, J.D. Dixon [6] showed that for all $\varepsilon > 0$ and for all $a, b, 1 < b < a < x$ with the exception of at most $o(x^2)$ couples, one has

$$\left| \delta\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{12}{\pi^2} \ln 2 \ln a \right| \leqslant (\ln a)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \ .$$

See H. Daudé's work for a dual result [5]. These results suggest the second problem.

PROBLEM 2. *Is it true that for all coprime* a *and* $b, 1 < b < a$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \delta\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right) = \frac{12}{\pi^2} \ln 2 \ln b \ ? \tag{1}$$

The limit should indeed be what is stated above and not

$$\frac{12}{\pi^2} \ln 2 \ln a \ .$$

since it is b, the smallest of the two integers a and b that seems to control the behavior of $(a/b)^n$. It is also to be noticed that in Dixon's inequality, the $\ln a$ that appears on the left hand side could well be replaced by $\ln b$ since for "almost all" couples a, b, $\ln a \approx \ln b$.

Numerical evidence supports equality (1). Based on computer computation, Chr. Batut and M. Olivier showed that

$$\left| \frac{1}{n} \delta\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right) - \frac{12}{\pi^2} \ln 2 \ln b \right|$$

is less than .02 for n in the range (4000, 5000) and for $a = 3$, $b = 2$ on the one hand and $a = 5$, $b = 2$ on the other hand.

§4. Related problems

My initial (unsuccessful) attempts to prove Theorem 1 were based on the comparison of $\delta(ax/b)$ to $\delta(x)$. I was hoping that a relationship between both depths would give by induction some results on $\delta(xa^n/b^n)$. This turned out nonconclusive, yet I did obtain some results which I believe are interesting in themselves [10].

Let a, b, c, d be coprime integers and let $\Delta = |ad - bc|$. Consider the Möbius map

$$x \mapsto Tx = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

THEOREM 2.

$$\limsup_{\delta(x) \to \infty} \frac{\delta(Tx)}{\delta(x)} = \Theta(\Delta)$$

where Θ *takes odd integral values. As* n *increases to infinity* $\Theta(n)$ *behaver like* $\ln n$. *More precisely let*

$$\alpha = \left(2 \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{-1}.$$

Then for all integer $n \geqslant 1$

$$1 + \alpha \ln n \leqslant \Theta(n) \leqslant 2(1 + \alpha \ln n).$$

Θ *is linked to the depth by the formula*

$$\Theta(n) = \max_{1 \leqslant b \leqslant n} \delta\left(\frac{b}{n}\right) + 1.$$