1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 39 (1993), p. 225-231

SMOOTHLY EMBEDDED 2-SPHERES AND EXOTIC 4-MANIFOLDS

by Paolo LISCA

1. INTRODUCTION

We prove two independent results concerning multiple smooth structures on certain topological 4-manifolds with boundary (theorems 1.1 and 1.2). The second of our results has been already proven by Akbulut [A]; we give here a different proof. The common underlying theme consists of obstructions to represent 2-homology classes of 4-manifolds by smoothly embedded spheres. Indeed, we use the fact that certain classes of self-intersection -1 or -2 cannot be represented by smoothly embedded spheres inside certain 4-manifolds, while they can inside others.

With our first result we give a partial answer to the following question, raised in [G]: given the 4-manifold with boundary $M(k, l, m)$, obtained by attaching 2-handles to B^4 according to the framed link of figure 1, how many diffeomorphism types are realized by permuting the integers k, l, and m?

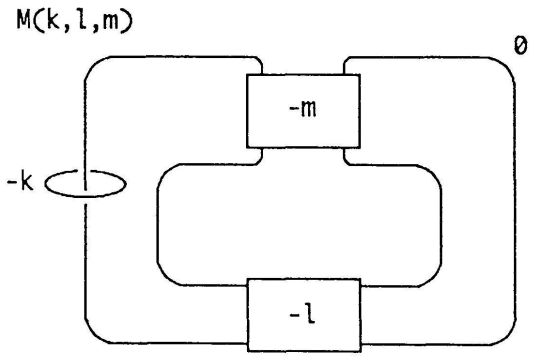


FIGURE 1

(In such pictures, a box with $-m$ inside means $-m$ full twists. A $-k$ next to a loop means that the francing has linking number $-k$ with the loop.)

Notice the equality $M(k, l, m) = M(k, m, l)$, obtained by an obvious isotopy of the link. In section 2 we prove the following:

THEOREM 1.1. *Let* $k, l, m, k \neq l$, *be positive integers with either* $k \leqslant 2$ *or* $l \leqslant 2$, *and* s *a non-negative integer. If either* (i) $s \neq 0$ *or* (ii) $s = 0$ *and* $k \equiv l \bmod 2$, *then the manifolds* $M(k, l, m) \overset{s}{\#} \overline{\mathbf{CP}}^2$ *and* $M(l, k, m) \overset{s}{\#} \overline{\mathbf{CP}}^2$ *are homeomorphic but their interiors are not diffeomorphic.*

We have as a corollary that for n odd $M(1, n, 1)$ and $M(n, 1, 1)$ are homeomorphic but not diffeomorphic, a result already obtained in [G] by a different method.

As for the second result, let W_i, $i = 1, 2$ be the 4-manifolds with boundary obtained via the framed knots K_i, $i = 1, 2$ of figure 2.

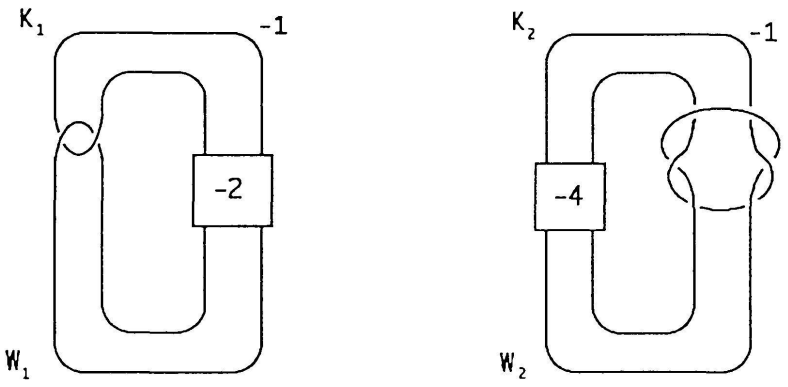


FIGURE 2

We give a new proof of the following theorem, due to Akbulut [A]:

THEOREM 1.2. W_1 *and* W_2 *are homeomorphic but their interiors are not diffeomorphic.*

Remark. In Akbulut's notation, the manifolds W_1 and W_2 are respectively $-Q_1$ and $-Q_2$.

To prove theorems 1.1 and 1.2 we use gauge-theoretical results about the smooth structure of blown-up elliptic surfaces [FM2]. We remark that also the analogous results from [G] and [A] depend on gauge theory.

Acknowledgments. We thank John Morgan for numerous discussions about embedded spheres in 4-manifolds, and for making available an early copy of his book with Bob Friedman [FM2]. We are also grateful to Riccardo Benedetti for helpful conversations.