§2. Classes d'idéaux au sens strict et réduction négative

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

où l est la longueur de la période d'une classe ambige de discriminant $4D$ et l^* celle de son image par l'homomorphisme θ du groupe des classes de discriminant $4D$ sur le groupe des classes de discriminant D défini dans [7]. La définition de θ est rappelée ci-dessous (Lemme 4).

Le but de ce travail est de montrer comment la méthode de [7], c'est-à-dire l'utilisation des idéaux des anneaux O_D et O_{4D}, permet de généraliser la condition (1.4) de manière analogue à (1.5), et ceci tout en mettant bien en évidence l'intérêt du développement négatif en fraction continue introduit par Mimura [9]. Nous prouvons le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Soit D un nombre positif, congru à 5 modulo 8. Soit C une classe d'idéaux* **au sens strict** *de l'ordre O_{4D} et $\theta(C)$ son image par l'homomorphisme θ. Soit l_- (respectivement l_-^*) le nombre des idéaux primitifs négativement réduits de C (respectivement de $\theta(C)$) et l^* le nombre des idéaux primitifs réduits de $\theta(C)$. Alors l'équation* (1.1) *a des solutions impaires si, et seulement si,*

$$l_- = 3l_-^* + l^* . \tag{1.6}$$

Dans la section suivante (§2) nous allons rappeler ou définir les notions intervenant dans l'énoncé du Théorème 1 et exposer la théorie des idéaux négativement réduits et de leurs périodes, pour laquelle il ne semble pas exister de référence accessible.

Dans la troisième section nous prouvons le Théorème 1 après avoir prouvé deux résultats (Théorèmes 2 et 3) permettant de relier les nombres des idéaux primitifs négativement réduits de O_{4D} et O_D avec le nombre des idéaux primitifs réduits de O_D.

Nous terminons en donnant des exemples numériques (§4).

§2. CLASSES D'IDÉAUX AU SENS STRICT ET RÉDUCTION NÉGATIVE

Soit $\Delta > 0$ un discriminant. Il existe un discriminant fondamental D_0 et un entier f positif tels que $\Delta = D_0 f^2$. Soit O_{D_0} l'anneau des entiers de $Q(\sqrt{D_0})$ et O_Δ l'anneau des entiers de conducteur f. Les *idéaux primitifs* de l'anneau O_Δ sont les $\mathbf{Z}$-modules $I = \left[a, \dfrac{b + \sqrt{\Delta}}{2}\right]$ tels que

$$a > 0 , \quad \frac{b^2 - \Delta}{4a} = c \in \mathbf{Z} , \quad (a, b, c) = 1 , \tag{2.1}$$

c'est-à-dire $I = a[1, \varphi]$ où $\varphi = \dfrac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ est déterminé modulo 1 et vérifie (2.1).

Nous dirons que l'idéal I et le nombre φ sont *associés.*

Soit α un nombre non nul de $Q(\sqrt{D_0})$. Nous désignerons par $\bar{\alpha}$ le conjugué $x - y\sqrt{D_0}$ de $\alpha = x + y\sqrt{D_0}$ où x, y sont des nombres rationnels. La proposition suivante permet de définir le discriminant de α.

PROPOSITION 1. *Soit* α *un nombre non nul de* $Q(\sqrt{D_0})$. *Il existe des entiers* $f > 0$, $a > 0$, b *tels que* $\alpha = \dfrac{b + f\sqrt{D_0}}{2a}$ *où* a *et* b *vérifient* (2.1) *avec* $\Delta = f^2 D_0$. *Les nombres* f, a *et* b *sont déterminés par* α.

DÉFINITION. *Le nombre* $\Delta = f^2 D_0$ *est le discriminant de* α.

Pour prouver la proposition 1, nous nous appuierons sur le lemme suivant:

LEMME 1. *Soient* $\alpha = \dfrac{x + y\sqrt{D_0}}{z} = \dfrac{X + Y\sqrt{D_0}}{Z}$, *avec* $(x, y, z) = 1$ *et* $z, Z > 0$. *Alors il existe un entier* $h > 0$ *tel que* $X = hx$, $Y = hy$, $Z = hz$.

Démonstration. Posons $x = d'x'$, $z = d'z' = d''z''$, $y = d''y''$ avec $(x', z') = (y'', z'') = (d', d'') = 1$, et d' et $d'' > 0$. Alors on voit qu'il existe $k > 0$ tel que $z' = kd''$, $z'' = kd'$ d'où $z = kd'd''$.

D'autre part on a $xZ = zX$ et $yZ = zY$ d'où $x'Z = kd''X$ et $y''Z = kd'Y$. Comme $(x', kd'') = (y'', kd') = 1$ on voit qu'il existe des entiers X' et Y'' tels que $X = x'X'$ et $Y = y''Y''$, d'où résulte $Z = kd''X' = kd'Y''$. Comme $(d', d'') = 1$ on voit qu'il existe h tel que $X' = hd'$, $Y'' = hd''$ ce qui donne $X = hd'x'$, $Y = hd''y''$, $Z = hkd'd''$, ce qu'il fallait prouver.

Démonstration de la proposition 1

D'après le lemme 1 les entiers $2a$, f et b sont à chercher parmi les nombres hz, hy et hx, et il suffit de montrer qu'il existe un et un seul entier $h > 0$ tel que

$$h\frac{D_0y^2 - x^2}{2z} = c \in \mathbf{Z}\,, \qquad (hz, 2hy, 2c) = 2\,. \tag{2.2}$$

Posons $\dfrac{D_0y^2 - x^2}{2z} = \dfrac{r}{s}$ avec $s > 0$ et $(r, s) = 1$. Les solutions de la première égalité (2.2) sont $h = ks$ et alors $c = kr$, où, d'après la seconde égalité (2.2), k est déterminé par $(ksz, 2ksy, 2kr) = 2$. Si un nombre premier p divisait sz,

sy et r, il diviserait y, z et $D_0y^2 - x^2$, donc x, y et z, ce qui n'est pas possible. Donc si sz est pair, la valeur de k qui convient est 1 et, si sz est impair, la valeur de k qui convient est $k = 2$. Ceci achève de prouver la proposition 1.

De la proposition 1 résulte immédiatement le résultat suivant

COROLLAIRE 1. *Les nombres associés aux idéaux primitifs de l'anneau* O_Δ *sont les nombres de discriminant* Δ.

Deux idéaux $I = a[1, \varphi]$ et $J = b[1, \psi]$ sont dits *équivalents au sens strict* s'il existe $\rho \in Q(\sqrt{D_0})$ tel que $N(\rho) > 0$ et $J = \rho I$. D'après [7], Proposition 3, c'est le cas si, et seulement si, il existe $p, q, r, s \in \mathbf{Z}$ tels que $ps - qr = 1$ et $\psi = \dfrac{p\varphi + q}{r\varphi + s}$. On dit alors que φ et ψ sont strictement équivalents. L'équivalence stricte implique l'équivalence usuelle, et l'on sait qu'un idéal $J = b[1, \psi]$ équivalent à un idéal $I = a[1, \varphi]$ primitif de O_Δ est un idéal primitif de O_Δ ([7], Corollary 3); ceci montre que le discriminant d'un nombre est conservé par équivalence.

L'ensemble des classes d'équivalence d'idéaux pour l'équivalence stricte contenant des idéaux primitifs forme un groupe fini C_Δ^+ pour la multiplication induite par la multiplication des idéaux, isomorphe au groupe des classes de formes quadratiques binaires primitives de discriminant Δ pour la composition.

Passons maintenant à la réduction. Un nombre φ de discriminant Δ est dit *réduit* si

$$-1 < \bar{\varphi} < 0 , \quad 1 < \varphi , \tag{2.3}$$

négativement réduit si

$$0 < \bar{\varphi} < 1 < \varphi . \tag{2.4}$$

L'idéal $I = a[1, \varphi]$ est dit *réduit* (respectivement *négativement réduit*) si l'on peut choisir φ modulo 1 de manière à vérifier (2.3) (respectivement 2.4). Alors on voit que

PROPOSITION 2. *Tout idéal réduit est négativement réduit.*

Démonstration. Soit $I = a[1, \varphi]$ où φ vérifie (2.3). Alors $I = a[1, \varphi + 1]$ où $\varphi + 1$ vérifie (2.4).

Plus généralement on a

LEMME 2. *L'idéal* $I = a[1, \varphi]$ *est réduit si, et seulement si,* $\varphi + [-\bar{\varphi}] > 1$, *négativement réduit si, et seulement si,* $\varphi + [-\bar{\varphi}] > 0$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que, pour tout nombre réel φ non entier on a $-1 < \bar{\varphi} + [-\bar{\varphi}] < 0$ et $0 < \bar{\varphi} + [-\bar{\varphi}] + 1 < 1$.

Tout idéal primitif réduit (respectivement négativement réduit) I de O_Δ s'écrit de *manière unique* $I = a[1, \varphi]$ où φ est un nombre réduit (respectivement négativement réduit) de $Q(\sqrt{D_0})$ de discriminant Δ. Nous dirons que l'idéal I et le nombre φ sont *associés.*

Il est bien connu que le nombre des idéaux réduits primitifs de O_Δ est fini. La proposition suivante montre qu'il en est de même pour les idéaux négativement réduits.

PROPOSITION 3. *L'ensemble des nombres négativement réduits de discriminant Δ donné est un ensemble fini. Le nombre des idéaux négativement réduits primitifs de O_Δ est fini.*

Démonstration. Pour montrer les deux assertions de la Proposition 3, il suffit de montrer que le nombre des solutions (b, a, c) de

$$0 < \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} < 1 < \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad b^2 = \Delta + 4ac \tag{2.5}$$

est fini. Comme (2.5) implique

$$0 < b - \sqrt{\Delta} < 2a, \qquad 2c < b + \sqrt{\Delta} \tag{2.6}$$

nous posons $2a = b - \alpha$, $2c = b - \alpha'$; alors $b^2 = \Delta + 4ac$ entraîne

$$\Delta + \alpha\alpha' = b(\alpha + \alpha'). \tag{2.7}$$

D'après (2.6) on a $b > \sqrt{\Delta} > |\alpha|, |\alpha'|$. De plus $\alpha \equiv \alpha' \equiv b \equiv \Delta \pmod 2$, donc $\alpha + \alpha' \equiv 0 \pmod 2$, et $\alpha + \alpha' \geqslant 2$.

Si $\alpha\alpha' = 0$ alors Δ est pair et (2.7) montre que $\Delta \equiv 0 \pmod{2b}$ donc $b \leqslant \frac{\Delta}{2}$.

Si $\alpha\alpha' > 0$ alors $\Delta < \Delta + \alpha\alpha' = b(\alpha + \alpha') < 2\Delta$. Donc α et $\alpha' > 0$.

Si $\alpha = \alpha' = 1$ alors $b = \frac{\Delta + 1}{2}$; sinon $\alpha + \alpha' \geqslant 4$ donc $b < \frac{\Delta}{2}$.

Si $\alpha\alpha' < 0$ alors $0 < \Delta + \alpha\alpha' = b(\alpha + \alpha') < \Delta$, donc $b < \frac{\Delta}{2}$.

Ainsi $\sqrt{\Delta} < b \leqslant \frac{\Delta}{2}$ si Δ est pair, $\sqrt{\Delta} < b \leqslant \frac{\Delta + 1}{2}$ si Δ est impair, ce qui prouve que le nombre des b, et par suite celui des triplets (b, c, a), satisfaisant à (2.5) est fini. Ceci termine la démonstration de la proposition 3.

Considérons maintenant le processus de réduction négative.

Soit $\varphi_0 = \dfrac{b_0 + \sqrt{\Delta}}{2a_0}$ $(a_0 > 0)$ un nombre de discriminant Δ. Supposons φ_n défini; nous définissons φ_{n+1} par

$$q_n = [\varphi_n + 1] , \qquad \varphi_n = q_n - \frac{1}{\varphi_{n+1}} . \tag{2.8}$$

On voit que φ_{n+1} est strictement équivalent à φ_n et que $\varphi_n > 1$ et $q_n \geqslant 2$ pour $n \geqslant 1$. De plus on a

$$\varphi_0 = q_0 - \cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \ddots - \cfrac{1}{q_n - \cfrac{1}{\varphi_{n+1}}}}} . \tag{2.9}$$

Inversement φ_0 étant donné la condition $\varphi_n > 1$ $(n \geqslant 1)$ et (2.9) définissent les q_i de manière unique.

Si φ_n est négativement réduit alors $0 < \bar{\varphi}_n < 1$ donc, comme $q_n \geqslant 2$, on a $0 < \bar{\varphi}_{n+1} < 1$ ce qui montre que φ_{n+1} est négativement réduit.

Au nombre $\varphi_n = \dfrac{b_n + \sqrt{\Delta}}{2a_n}$ $(a_n > 0)$ est associé l'idéal I_n tel que

$$I_n = a_n[1, \varphi_n] = \left[a_n, \frac{b_n + \sqrt{\Delta}}{2}\right] ,$$

et tous les idéaux I_n sont *strictement* équivalents entre eux.

Comme (Proposition 3) le nombre des nombres négativement réduits de discriminant Δ est fini on voit, comme dans la théorie des idéaux réduits, que les nombres φ négativement réduits de discriminant Δ, ainsi que les idéaux I associés se répartissent en un nombre fini de périodes.

Définissons maintenant deux suites d'entiers A_n et $B_n (n \geqslant -2)$ par

$$\begin{cases} A_{-2} = 0 , & A_{-1} = +1 , & A_n = q_n A_{n-1} - A_{n-2} , \\ B_{-2} = -1 , & B_{-1} = 0 , & B_n = q_n B_{n-1} - B_{n-2} . \end{cases} \tag{2.10}$$

On vérifie par récurrence sur n les relations suivantes

$$\varphi_n = \frac{B_{n-2}\varphi_0 - A_{n-2}}{B_{n-1}\varphi_0 - A_{n-1}} , \qquad \varphi_0 = \frac{A_{n-1}\varphi_n - A_{n-2}}{B_{n-1}\varphi_n - B_{n-2}} , \qquad (n \geqslant 0) , \tag{2.11}$$

$$A_nB_{n-1} - A_{n-1}B_n = -1\,, \quad (n \geqslant -1)\,, \tag{2.12}$$

$$\varphi_1 \cdots \varphi_n = B_{n-1}\varphi_n - B_{n-2}\,, \quad (n \geqslant 1)\,, \tag{2.13}$$

$$B_n \geqslant B_{n-1} + 1 \geqslant 1\,, \quad \text{d'où } B_n \geqslant n+1\,, \quad (n \geqslant 0)\,, \tag{2.14}$$

$$A_n - \varphi_0 B_n = \frac{-1}{B_n\varphi_{n+1} - B_{n-1}}\,. \tag{2.15}$$

Définissons le nombre θ_n par

$$\theta_n = \varphi_1 \ldots \varphi_n\,. \tag{2.16}$$

Nous pouvons maintenant montrer, avec les notations qui précèdent, la

PROPOSITION 4. *Pour n assez grand le nombre φ_n et l'idéal I_n sont négativement réduits. Le nombre θ_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Soit $\varphi_0 = \dfrac{b_0 + \sqrt{\Delta}}{2a_0}$ avec $a_0 > 0$. Nous avons $\varphi_1 = \dfrac{1}{q_0 - \varphi_0} > 1$ et $\bar{\varphi}_1 = \dfrac{1}{q_0 - \varphi_0 + (\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)}$, donc $0 < \bar{\varphi}_1 < \varphi_1$. Remplaçant φ_0 par φ_1 si nécessaire nous pouvons supposer $0 < \bar{\varphi}_0 < \varphi_0$. De (2.11) et (2.12) on déduit

$$\varphi_0 - \bar{\varphi}_0 = \frac{\varphi_n - \bar{\varphi}_n}{(B_{n-1}\varphi_n - B_{n-2})\,(B_{n-1}\bar{\varphi}_n - B_{n-2})}$$

Supposons $\bar{\varphi}_n > 1$. D'après (2.14) on a $B_{n-1}\bar{\varphi}_n - B_{n-2} > 1$ et $B_{n-1} \geqslant B_{n-2} + 1$, donc

$$\varphi_0 - \bar{\varphi}_0 < \frac{\varphi_n - 1}{B_{n-1}\varphi_n - B_{n-1} + 1} = \frac{1}{B_{n-1} + \dfrac{1}{\varphi_n - 1}} < \frac{1}{B_{n-1}} \leqslant \frac{1}{n}$$

ce qui n'est pas possible pour n assez grand donc il existe n_0 tel que, à partir de n_0, φ_n est négativement réduit.

Pour montrer que $\theta_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, il suffit de remarquer que $\varphi_i > 1$ pour $i \geqslant 1$ et que φ_i ne prend qu'un nombre fini de valeurs pour $i \geqslant n_0$. Ceci achève de prouver la Proposition 4.

L'étape suivante consiste à montrer que deux nombres strictement équivalents négativement réduits sont dans la même période négative. Nous adaptons le raisonnement classique (voir par exemple [3] § 10-6, 10-10, 10-11

ou [11] §29) à notre objet en nous référant à [11], Satz 5.2, qui dit que chaque nombre réel a un développement en fraction continue négative bien déterminé. Nous commençons par le

LEMME 3. *Si* $\varphi_0 = \dfrac{P\psi - Q}{R\psi - S}$ *avec* $PS - QR = -1$, $R > S > 0$, *et* $\psi > 1$ *alors il existe* n *tel que* $\psi = \varphi_n$.

Démonstration. Nous appliquons le processus (2.8), (2.9) au nombre rationnel $\dfrac{P}{R} = \varphi_0'$. Dans ce cas (2.8) s'écrit successivement

$$P = q_0'R - r_1\,, \quad \varphi_0' = \frac{P}{R}\,, \quad q_0' = \left[\frac{P}{R} + 1\right], \quad 0 \leqslant r_1 < R\,,$$

$$R = q_1'r_1 - r_2\,, \quad \varphi_1' = \frac{R}{r_1} \quad q_1' = [\varphi_1' + 1] \geqslant 2\,, \quad 0 \leqslant r_2 < r_1\,,$$

. . . . . .

$$r_{n-1} = q_n' r_n - r_{n+1}\,, \quad \varphi_n' = \frac{r_{n-1}}{r_n}\,, \quad q_n' = [\varphi_n' + 1] \geqslant 2\,, \quad 0 \leqslant r_{n+1} < r_n\,,$$

. . . . . .

$$r_{N-1} = q_N' r_n - r_{n+1}\,, \quad \varphi_N' = \frac{r_{N-1}}{r_N} = q_N'\,, \quad q_N' = [\varphi_N' + 1] \geqslant 2\,, \quad r_{N+1} = 0\,.$$

Le fait qu'il existe N tel que $r_{N+1} = 0$ vient de ce que la suite des entiers positifs r_i est strictement décroissante. Tenant compte de (2.11) et (2.10) il vient

$$\frac{P}{R} = \frac{A_{N-1}q_N' - A_{N-2}}{B_{N-1}q_N' - B_{N-2}} = \frac{A_N}{B_N}\,,$$

puis, comme $(P, R) = (A_N, B_N) = 1$, R et $B_N > 0$ on voit que $P = A_N$, $R = B_N$ d'où $-1 = PS - RQ = PB_{N-1} - RA_{N-1}$, donc $P(S - B_{N-1}) = R(Q - A_{N-1})$.

Comme $(P, R) = 1$, R divise $S - B_{N-1}$, ce qui n'est possible que si $S = B_{N-1}$ car $0 < S < R$ et $0 \leqslant B_{N-1} < B_N = R$. Donc on a:

$$\varphi_0 = \frac{A_N\psi - A_{N-1}}{B_N\psi - B_{N-1}}\,.$$

Ceci s'écrit

$$\varphi_0 = q_0' - \cfrac{1}{q_1' - \cfrac{1}{q_2' - \ddots - \cfrac{1}{q_N' - \cfrac{1}{\psi}}}}$$

c'est-à-dire (2.9) pour $N = n$ où q_i est remplacé par q_i' *et* φ_{N+1} par ψ. En développant ψ en fraction continue négative on trouve **le** développement de φ_0 en fraction continue négative ([11], Satz 5.2), donc $q_i' = q_i$ et $\psi = \varphi_{N+1}$, ce qui démontre le lemme 3.

PROPOSITION 5. *Deux nombres négativement réduits strictement équivalents sont dans la même période.*

Démonstration. Supposons $\psi = \dfrac{a\varphi - b}{c\varphi - d}$ avec a, b, c, d entiers tels que $ad - bc = -1$, où nous pouvons supposer $c\varphi - d > 0$ en changeant, si nécessaire, les signes de a, b, c et d. Développons $\varphi = \varphi_0$ en fraction continue négative et remplaçons; il vient

$$\psi = \frac{P\varphi_n - Q}{R\varphi_n - S} \text{ avec } R = cA_{n-1} - dB_{n-1}, S = cA_{n-2} - dB_{n-2}.$$

D'après (2.13) et (2.15) on a $A_{n-1} = \varphi B_{n-1} - \dfrac{1}{\theta_{n-1}}$, $A_{n-2} = \varphi B_{n-2} - \dfrac{1}{\theta_{n-2}}$, d'où

$$R = B_{n-1}(c\varphi - d) - \frac{c}{\theta_{n-1}}, \quad S = B_{n-2}(c\varphi - d) - \frac{c}{\theta_{n-2}}.$$

Comme $B_{n-1} \geqslant n$, $B_{n-2} \geqslant n - 1$, $B_{n-1} \geqslant B_{n-2} + 1$ et que θ_{n-1} et $\theta_{n-2} \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, on voit que pour n assez grand $R > S > 0$ ce qui, d'après le Lemme 3, montre que φ_n est dans la période de ψ et prouve la Proposition 5.