1. Fonctions caractéristiques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

forment de façon très simple, ce qui permet de retrouver le résultat d'Ehrhart (si P est un polytope) par un passage à la limite en $x = 1$. On peut même donner une formule explicite, mais horrible, pour la fonction i_P (voir [B], Théorème 3.1).

Dans [B], les identités précédentes entre fonctions caractéristiques ont été établies grâce au dictionnaire entre polyèdres convexes entiers, et variétés toriques munies d'un fibré en droites ample (voir [O], Chapter II). Ensuite, M. Ishida a donné une démonstration élémentaire de résultats un peu plus généraux (voir [I]). Le but de ce travail est d'exposer les propriétés des fonctions caractéristiques des polyèdres convexes entiers, en suivant les idées d'Ishida, et d'en déduire des généralisations du théorème d'Ehrhart (théorèmes 3.1 et 3.2 ci-dessous). Les preuves reposent sur des variantes de la relation d'Euler entre les nombres de faces d'un polytope (lemme 2.1 ci-dessous).

Un problème intéressant mais complètement ouvert, est d'interpréter, en fonction de la géométrie du polytope convexe entier P, les coefficients de l'application polynomiale $i_P(n) = a_0 + a_1 n + \cdots + a_d n^d$. On sait depuis Ehrhart que $a_0 = 1$; de plus, d est la dimension de P; a_d est la mesure de P, et $2a_{d-1}$ est la mesure du bord de P (voir 3.2 ci-dessous). Mais la signification de $a_1, \ldots, a_{d-2}$ est inconnue.

1. Fonctions caractéristiques

1.1. Polynômes et séries de Laurent

Les notations de cette section seront utilisées dans toute la suite. Soient M un réseau dans un espace vectoriel réel V, de dimension finie d. On note $\mathbf{Z}[M]$ l'algèbre du groupe M sur $\mathbf{Z}$, et $(x^m)_{m \in M}$ sa base canonique: la multiplication dans $\mathbf{Z}[M]$ est définie par $x^m \cdot x^{m'} = x^{m+m'}$. Le choix d'une base $(m_1, \ldots, m_d)$ de M induit un isomorphisme de $\mathbf{Z}[M]$ avec l'anneau des polynômes de Laurent, à coefficients entiers, en les indéterminées $x^{m_1}, \ldots, x^{m_d}$.

On note $\mathbf{Z}[[M]]$ le groupe abélien formé des séries formelles $\sum_{m \in M} a_m x^m$ à coefficients entiers. On définit sur $\mathbf{Z}[[M]]$ une structure de module sur $\mathbf{Z}[M]$, par

$$x^p \cdot \sum_{m \in M} a_m x^m = \sum_{m \in M} a_{m-p} x^m$$

(mais en général, on ne peut définir le produit de deux séries formelles). On peut voir $\mathbf{Z}[[M]]$ comme l'ensemble des séries de Laurent formelles, en d indéterminées.

Soit S le sous-ensemble de $\mathbf{Z}[M]$ formé des produits finis d'éléments de la forme $1 - x^m$, $m \in M \backslash \{0\}$. On note $S^{-1}\mathbf{Z}[M]$ le sous-anneau du corps des fractions de $\mathbf{Z}[M]$, formé des $s^{-1}u$ où $u \in \mathbf{Z}[M]$ et $s \in S$. Enfin, on note $\mathscr{L}(M)$ l'ensemble des $u \in \mathbf{Z}[[M]]$ tels que $S \cdot u$ rencontre $\mathbf{Z}[M]$; c'est un sous-$\mathbf{Z}[M]$-module de $\mathbf{Z}[[M]]$.

Pour tout entier $p \geqslant 0$, on note S_p le sous-ensemble de S formé des produits d'au plus p éléments de la forme $1 - x^m$, $m \in M \backslash \{0\}$. On définit de façon évidente $S_p^{-1}\mathbf{Z}[M]$ et $\mathscr{L}_p(M)$.

PROPOSITION. *Il existe un unique* $\mathbf{Z}[M]$*-morphisme*

$$\mathscr{S}: \mathscr{L}(M) \to S^{-1}\mathbf{Z}[M]$$

tel que $\mathscr{S}(u) = u$ *pour tout* $u \in \mathbf{Z}[M]$. *De plus,* $\mathscr{S}(\mathscr{L}_p(M)) \subset S_p^{-1}\mathbf{Z}[M]$ *pour tout entier* $p \geqslant 0$.

Démonstration. Soit $u \in \mathscr{L}_p(M)$. Choisissons $s \in S_p$ tel que $v = s \cdot u \in \mathbf{Z}[M]$, et posons $\mathscr{S}(u) = s^{-1}v \in S^{-1}\mathbf{Z}[M]$. On vérifie immédiatement que $\mathscr{S}(u)$ ne dépend pas du choix de s, et que $\mathscr{S}$ convient. $\square$

On appelle $\mathscr{S}(u)$ la *somme* de la série formelle $u \in \mathscr{L}(M)$. Par exemple, pour tout $m \in M \backslash \{0\}$, on a:

$$\mathscr{S}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{nm}\right) = (1 - x^m)^{-1} \quad \text{et} \quad \mathscr{S}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{nm}\right) = 0\,.$$

1.2. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES DE CÔNES ET POLYÈDRES

Définitions. Une demi-droite δ de V est *entière* si son origine m est un point de M, et si $\delta \backslash \{m\}$ rencontre M. Un *cône* (convexe, rationnel, polyédral) est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de demi-droites entières, de même origine O. Le cône C est *saillant* s'il ne contient aucune droite, et *simplicial* s'il est enveloppe convexe de demi-droites dont les directions sont linéairement indépendantes.

Une *subdivision* du cône C est une famille $(C_i)_{i \in I}$ de cônes saillants telle que:

$C = \bigcup_{i \in I} C_i$;

si F est une face de C_i, alors $F = C_j$ pour un $j \in I$;

l'intersection $C_i \cap C_j$ est une face de C_i et de C_j.

La *fonction caractéristique* d'un cône C est l'élément

$$\varphi(C) = \sum_{m \in C \cap M} x^m$$

de $\mathbf{Z}[[M]]$. Remarquons que C est uniquement déterminé par $\varphi(C)$; en effet, C est l'enveloppe convexe du support de $\varphi(C)$.

PROPOSITION. *Pour tout cône C, on a: $\varphi(C) \in \mathscr{L}_d(M)$. De plus, C est saillant si et seulement si $\varphi(C) \neq 0$.*

Démonstration. Traitons d'abord le cas où C est simplicial. Soient $\delta_1, \ldots, \delta_n$ ses arêtes. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, le monoïde $\delta_i \cap M$ a un unique générateur m_i. Tout élément de C s'écrit de façon unique $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)m_i$ où $x_i \in \mathbf{N}, 0 \leqslant y_j < 1$ et $\sum_{j=1}^{n} y_j m_j \in C$. Par suite, si P_C désigne l'ensemble des $\sum_{j=1}^{n} y_j m_j$ avec $0 \leqslant y_j < 1$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$, alors

$$\varphi(C) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 - x^{m_i}) = \sum_{m \in P_C \cap M} x^m$$

et de plus $P_C \cap M$ est fini, donc $C \in \mathscr{L}_n(M) \subset \mathscr{L}_d(M)$.

Dans le cas général, on choisit une subdivision $(C_i)_{i \in I}$ de C en cônes simpliciaux. Alors

$$\varphi(C) = \sum_{i} \varphi(C_i) - \sum_{i,j} \varphi(C_i \cap C_j) + \sum_{i,j,k} \varphi(C_i \cap C_j \cap C_k) - \cdots$$

est une somme alternée de fonctions caractéristiques de cônes simpliciaux, donc $\varphi(C) \in \mathscr{L}_d(M)$.

Pour la seconde assertion, supposons d'abord que C n'est pas saillant. Il existe alors $m \in M \backslash \{0\}$ tel que $\mathbf{R}m \subset C$. Par suite, $C = m + C$ d'où $(1 - x^m)\varphi(C) = 0$, et $\mathscr{S}(\varphi(C)) = 0$.

Réciproquement, supposons C saillant, et montrons que $\mathscr{S}(\varphi(C)) \neq 0$. Sinon, soient $m_1, \ldots, m_n$ dans $M \backslash \{0\}$ tels que

$$\varphi(C) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 - x^{m_i}) = 0 . \tag{1}$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, l'ensemble des formes linéaires λ sur V, telles que $\lambda(p) > 0$ pour tout $p \in C \backslash \{0\}$, est un ouvert non vide du dual V^* de V. Par suite, on peut trouver un tel λ avec $\lambda(m_i) \neq 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Puisque

$$1 - x^{m_i} = - x^{m_i}(1 - x^{-m_i}) ,$$

on peut au besoin changer m_i en $-m_i$, et supposer que $\lambda(m_i) > 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors, si $\mathbf{Z}[[M]]_+$ désigne le sous-groupe de $\mathbf{Z}[[M]]$ formé des séries à support dans le demi-espace ouvert $(\lambda > 0)$, on a: $\varphi(C) \in 1 + \mathbf{Z}[[M]]_+$, donc

$$\varphi(C) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 - x^{m_i}) \in 1 + \mathbf{Z}[[M]]_+$$

ce qui contredit (1). $\square$

Pour tout cône C, on pose $\Phi(C) = \mathscr{S}(\varphi(C))$; c'est un élément de $S_d^{-1}\mathbf{Z}[M]$.

Définissons un *polyèdre convexe entier P* comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de demi-droites entières, et de points de M; la fonction caractéristique de P est $\varphi(P) = \sum_{m \in P \cap M} x^m$. Nous verrons en 2.2 que $\varphi(P) \in \mathscr{L}_d(M)$, et que sa somme $\mathscr{S}(\varphi(P)) = \Phi(P)$ s'exprime à l'aide des fonctions caractéristiques des cônes tangents aux sommets de P.

2. Identités entre fonctions caractéristiques

2.1 Un propriété d'additivité

Définitions. Le *cône dual* d'un cône C de V est

$$\check{C} = \{\lambda \in V^* \mid \lambda(x) \geqslant 0, \ \forall x \in C\} .$$

$\check{C}$ est un cône convexe polyédral de V^*, rationnel pour le réseau dual M^* de M. De plus, la codimension de $\check{C}$ est la dimension de $C \cap (-C)$, c'est-à-dire du plus grand sous-espace vectoriel contenu dans C. En particulier, C est saillant si et seulement si $\check{C}$ est de dimension d.

Soit C un cône de V, et $(\sigma_i)_{i \in I}$ une subdivision de son cône dual σ; alors $C = \bigcap_{i \in I} C_i$ où C_i est le cône dual de σ_i. Pour tout $i \in I$, on se donne $f_i \in M$ tel que $f_i \mid \sigma_j = f_j$ quelle que soit la face σ_j de σ_i (on considère f_i comme fonction linéaire sur σ_i). Alors les f_i se recollent en une fonction continue sur σ, linéaire par morceaux, à valeurs entières sur $\sigma \cap M^*$. On dit que f est *convexe* si $f(a) + f(b) \leqslant f(a+b)$ pour tous a, b dans σ; cela signifie que pour tout $m \in V$, l'ensemble

$$A(m) = \{x \in \sigma \mid m(x) < f(x)\}$$

est vide ou convexe.