5. Actions libres de S^1

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

(4.3) *Remarques.*

a) Les actions du théorème (4.2) sont essentiellement celles construites par Milnor [Mi2]. A l'époque, on ne disposait pas de l'invariance topologique de la torsion de Whitehead, ce qui empêchait Milnor de déduire qu'elles n'étaient pas topologiquement conjuguées à une action linéaire.

b) La démonstration de (4.2) se généralise au cas d'actions libres d'un groupe fini G sur S^n, pourvu que $Wh(G)$ contienne une infinité d'éléments τ tels que $\tau = \bar{\tau}$. C'est, par exemple le cas du groupe du dodécaèdre à 120 éléments (voir [Ha], chapitre 5) qui agit librement sur S^{4k-1}.

c) Il est connu que le groupe de chirurgie $L_2(C_q)$ est infini si $q > 2$ [Ba]. On déduit alors de la suite exacte de la chirurgie (et de la théorie du lissage) pour un espace lenticulaire V^6 avec groupe fondamental C_q qu'il existe une infinité dénombrable de variétés W^6 homotopiquement équivalente à V qui sont deux-à-deux non-topologiquement h-cobordantes. Leurs revêtements universels sont des sphères d'homotopie de dimension 6 donc difféomorphes à S^6. Cet argument montre que pour $q > 2$, il existe une infinité d'actions libres de C_q sur S^6 qui sont deux-à-deux non-topologiquement conjuguées et dont aucune n'est topologiquement conjuguée à une action QL.

5. Actions libres de S^1

Nous commencerons par les actions libres de S^1 sur S^3.

(5.1) Proposition. *Toute action libre de S^1 sur S^3 est différentiablement conjuguée à l'action standard.*

Démonstration. Une action libre de S^1 sur S^3 donne un fibré principal $p: S^3 \to S^1 \backslash S^3 = V$ (voir le paragraphe 3). On en déduit que V est une surface qui, par suite exacte du fibré p est simplement connexe. Il s'en suit que V est difféomorphe à S^2. Le fibré p est induit du fibré de Hopf par une application $f: V \to S^2$. Comme dans la démonstration du cas a) du théorème (3.1), on déduit que le degré de f est ± 1 et donc f est homotope à un difféomorphisme. Ce difféomorphisme se relève, au niveau des espaces totaux, en un difféomorphisme S^1-équivariant qui conjugue notre action de départ avec l'action standard.

(5.2) Théorème. *Toute action libre QL de S^1 sur S^n, avec $n \geqslant 7$, est différentiablement conjuguée à l'action standard.*

Démonstration. Soit (S^n, α) une telle action. Par le lemme (3.2), on sait que l'action linéaire associée α' est standard. Par le théorème (3.1), il existe un h-cobordisme $(W^n, V_{\alpha'}, V_\alpha)$. Comme W est simplement connexe et $n \geqslant 7$, le théorème du h-cobordisme implique que W est difféomorphe à $V_{\alpha'} \times [0,1]$. On en déduit, par le cas a) du théorème (3.1) que α et α' sont différentiablement conjuguées.

(5.3) *Remarque.* Il existe, en général, une infinité dénombrable d'actions libre de S^1 sur S^n qui sont deux-à-deux non-topologiquement conjuguées (voir [Hs] pour un exemple dans le cas $n = 11$). Ces actions ne sont donc pas topologiquement conjuguées à une action QL.

La situation pour les actions libres de S^1 sur S^n, pour $n \geqslant 7$ peut donc se schématiser de la façon suivante:

$$\text{actions linéaires} =_{\text{diff}} \text{actions } QL \neq_{\text{TOP}} \text{actions générales.}$$

En revanche, pour les actions libres de S^1 sur S^5, on va voir que l'on a:

$$\text{actions linéaires} =_{\text{TOP}} \text{actions } QL =_{\text{DIFF}} \text{actions générales}$$

et que l'égalité actions linéaires $=_{diff}$ actions QL constitue un problème ouvert. De manière précise:

(5.4) THÉORÈME. *a) Toute action libre de S^1 sur S^5 est différentiablement conjuguée à une action QL et topologiquement conjuguée à l'action standard.*

b) L'ensemble des classes de conjugaison différentiable d'actions QL libres de S^1 sur S^5 se surjecte sur l'ensemble des classes de difféomorphisme de structures différentiables sur $\mathbf{CP}^2$. *Les préimages de cette surjection ont au plus 2 éléments.*

Remarque. La détermination de l'ensemble des classes de difféomorphisme de structures différentiables sur $\mathbf{CP}^2$ constitue un problème ouvert. On ne sait même pas si cet ensemble est fini (le même ensemble, pour certaines sommes connexes de $\pm\mathbf{CP}^2$, est infini [FM]). Dans l'état actuel des connaissances il est bien sûr possible que cet ensemble soit réduit à un seul élément, auquel cas toute action libre serait différentiablement conjuguée à l'action standard (voir le corollaire (5.5) ci-dessous).

Démonstration. Soit (S^5, α) une action différentiable libre de S^1 sur S^5. Le quotient $V_\alpha = S^1 \backslash S^5$ est une variété de dimension 4 et la projection $p\colon S^5 \to V_\alpha$ est un S^1-fibré principal, induit du fibré de Hopf η. On a donc un morphisme de S^1-fibrés:

$$\begin{array}{ccc} S^5 & \rightarrow & S^5 \\ \downarrow p & & \downarrow \eta \\ V_\alpha & \xrightarrow{f} & \mathbf{CP}^2 \end{array}$$

Avec la suite exacte d'homotopie, on vérifie que f est une équivalence d'homotopie. Un théorème de C.T.C. Wall [Ki], Theorem 1 p. 59 implique que V_α et $\mathbf{CP}^2$ sont h-cobordante ce qui, par le théorème (3.1), entraîne que α est différentiablement conjuguée à une action QL (l'action linéaire associée étant standard). De plus, le théorème du h-cobordisme topologique de M. Freedmann [Fr], théorème 1.3 implique que V_α est homéomorphe à $\mathbf{CP}^2$. L'action α est donc topologiquement conjuguée à l'action standard (Théorème (3.1), cas b). Ceci démontre le point a) et permet de définir l'application du point b): à une action QL libre α on associe sa variété quotient V_α.

Soit V une variété différentiable homéomorphe à $\mathbf{CP}^2$. Par le théorème de Wall cité ci-dessus, il existe un h-cobordisme $(W, \mathbf{CP}^2, V)$. Le fibré de Hopf sur $\mathbf{CP}^2$ s'étend en un S^1-fibré principal sur W qui, par restriction à V donne un S^1-fibré principal $E \rightarrow V$. Par le théorème du h-cobordisme, E est difféomorphe à S^5. On obtient ainsi une action α libre de S^1 sur S^5 qui est QL par le théorème (3.1), avec $V_\alpha = V$. Cela démontre que notre correspondance est surjective. D'autre part, soient α et α' sont deux actions libres dont les quotients sont difféomorphes à V. Les projections de S^5 sur V_α et $V_{\alpha'}$ sont donc équivalentes à deux S^1-fibrés principaux sur V. Comme dans la démonstration du théorème 3.1, on vérifie que les premières classes de Chern de ces fibrés sont des générateurs de $H^2(V;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Cela montre que V a au plus deux préimages qui seront confondues si et seulement si V possède un difféomorphisme sur lui-même induisant la multiplication par -1 sur $H^2(V;\mathbf{Z})$. Cela achève la preuve du point b) et démontre le corollaire suivant:

(5.5) COROLLAIRE. *Les deux énoncés suivants sont équivalents:*

1) *Toute action libre de* S^1 *sur* S^5 *est différentiablement conjuguée à l'action standard.*

2) *Toute variété différentiable homéomorphe à* $\mathbf{CP}^2$ *est difféomorphe à* $\mathbf{CP}^2$.