

Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ACTIONS QUASI-LINÉAIRES SUR LES SPHÈRES

par Jean-Claude HAUSMANN

INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie compact. Une représentation $\alpha: G \rightarrow O_{n+1}$ de G induit une action $G \times S^n \rightarrow S^n$. Une telle action est dite *linéaire* (ou orthogonale).

Cet article est motivé par la remarque que l'on peut se servir de α pour engendrer d'autres actions sur S^n . Pour cela, considérons un plongement $e: S^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$. On suppose que l'image $X = e(S^n)$ est invariante par l'action de G sur \mathbf{R}^{n+1} , c'est-à-dire que $GX = X$. Pour simplifier, nous supposons également que X englobe O (c'est-à-dire que O est dans la composante relativement compacte du complémentaire de X). La figure 1 ci-dessous donne un

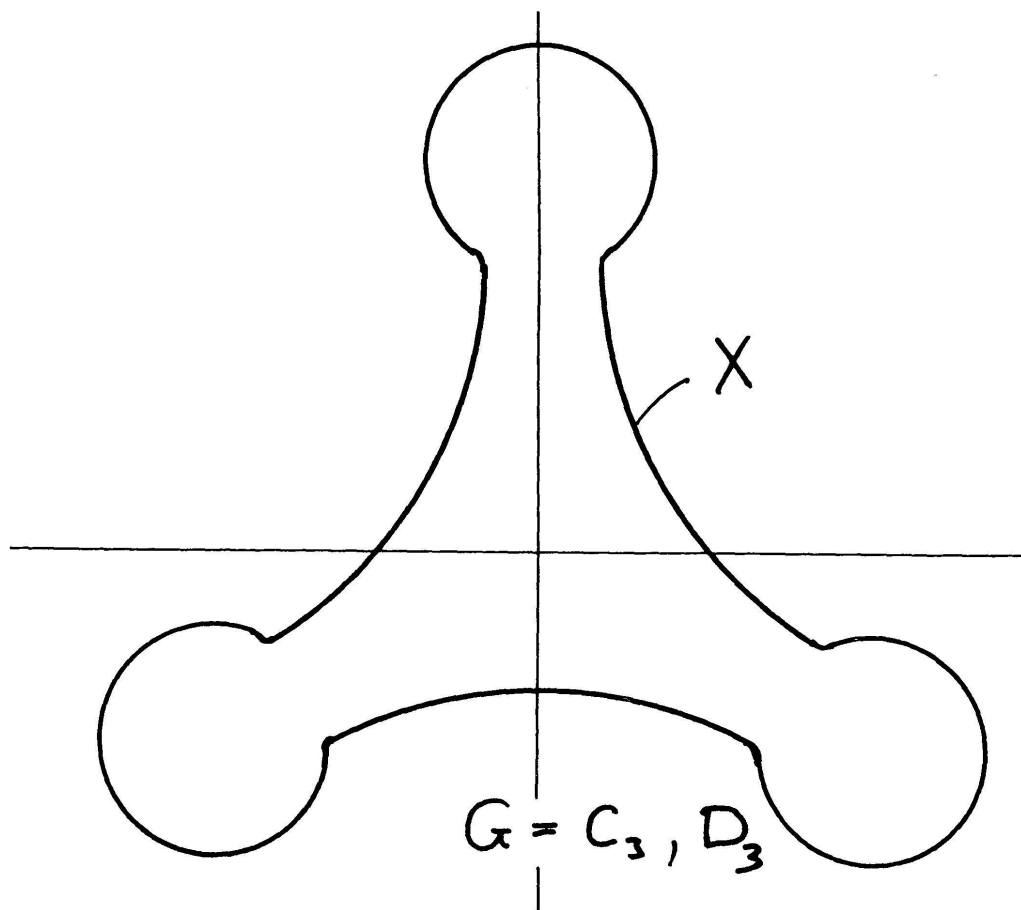


FIGURE 1

exemple pour le cas $n = 1$, $G = C_3$ (cyclique d'ordre 3) ou $(D_3$ (dihédral). On obtient alors une nouvelle action

$$G \times S^n \rightarrow S^n$$

$$(g, x) \mapsto g*x = e^{-1}(ge(x))$$

Une telle action sera dite *quasi-linéaire* (*QL*) (d'action linéaire associée α). Nous nous proposons, dans cet article, d'étudier les questions suivantes:

1) Une action *QL* est-elle toujours différentiablement conjuguée à son action linéaire associée? (C'est-à-dire, existe-t-il un difféomorphisme $h: S^n \rightarrow S^n$ tel que $g*x = h^{-1}gh(x)$?)

2) Une action *QL* est-elle toujours topologiquement conjuguée à son action linéaire associée? (C'est-à-dire, existe-t-il un homéomorphisme $h: S^n \rightarrow S^n$ tel que $g*x = h^{-1}gh(x)$?)

3) Toute action de G sur S^n est-elle différentiablement (ou topologiquement) conjuguée à une action *QL*?

On verra que la réponse à ces questions, pour différents n et G , est parfois positive, parfois négative et parfois ouverte et équivalente à un problème célèbre, par exemple la conjecture de Poincaré différentiable en dimension 4. Il est à remarquer que ces questions, dont l'énoncé est extrêmement élémentaire, mettent en jeu, pour leur résolution, une partie importante des grandes techniques de la topologie différentielle.

Des exemples naturels d'actions *QL* sont donnés au paragraphe 7. On en trouvera aussi dans [Ha2], paragraphe 4.

Je tiens à remercier P. Vogel et M. Rothenberg pour d'intéressantes discussions.

2. *G*-COBORDISMES D' ACTIONS

Soit G un groupe de Lie. Nous travaillons dans la catégorie des G -variétés. Un objet de cette catégorie est une paire (V, α) , où V est une variété différentiable (C^∞) et $\alpha: G \times V \rightarrow V$ est une action différentiable. Une telle action définit (et est déterminée par) un homomorphisme $G \rightarrow \text{DIFF}(V)$, où $\text{DIFF}(V)$ dénote le groupe des difféomorphismes de V . Cet homomorphisme sera également dénoté par α . De ce point de vue, un morphisme de (V_1, α_1) vers (V_2, α_2) est une application différentiable $f: V_1 \rightarrow V_2$ qui est G -équivariante, ce qui peut s'écrire $f \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ f$.

Un *G-cobordisme* entre deux G -variétés (V_1, α_1) et (V_2, α_2) est une G -variété (B, β) , où (B, V_1, V_2) est un cobordisme (i.e. $\partial B = V_1 \amalg V_2$) tel que la