

Objektyp: **Abstract**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

TOEPLITZ SEQUENCES, PAPERFOLDING,  
TOWERS OF HANOI AND PROGRESSION-FREE SEQUENCES  
OF INTEGERS

by Jean-Paul ALLOUCHE and Roland BACHER

ABSTRACT. What is the relationship between folding a piece of paper, moving disks in the classical tower of Hanoi algorithm and searching for minimal sequences of integers having no  $p$  terms in arithmetic progression? Our aim is to show how the Toeplitz sequences introduced by Jacobs and Keane in [15] allow us to give (*inter alia*) a unified description of the preceding problems. We give moreover some connections between Toeplitz sequences and  $q$ -automatic sequences.

1. TOEPLITZ SEQUENCES

In [15], (see also [21]), Jacobs and Keane defined the notion of Toeplitz sequence: they wanted to construct “explicit” sequences giving rise to strictly ergodic systems. They proved moreover that the unique invariant measure attached to such a sequence has a discrete rational spectrum. Roughly speaking a Toeplitz sequence is obtained by successive insertions of periodic sequences into the “holes” of a given periodic sequence, (a precise definition is given below). This construction was inspired by a device used by Toeplitz [28] for building explicitly almost periodic real functions. The method of Jacobs and Keane has since been used by many people working in ergodic theory (see for instance [29], [16] and [25], see also [14] and its impressive bibliography). We now give the definition of a Toeplitz sequence (compare with [15], [16], [14] and [29]):

Let  $\Gamma = \{a_1, \dots, a_r, \omega\}$  be an alphabet (finite set) with a “marked” letter (“hole”)  $\omega$ . If  $B = (B(k))_{k \geq 0}$  is a sequence with values in  $\Gamma$ , we define a transformation  $T_B: \Gamma^{\mathbb{N}} \rightarrow \Gamma^{\mathbb{N}}$  as follows: for any sequence  $C = (C(k))_{k \geq 0}$  with values in  $\Gamma$ , let  $h_0 < h_1 < \dots$  be the increasing sequence (which might