1. Introduction

L'Enseignement Mathématique, t. 38 (1992), p. 219-232

POLYNÔMES HOMOGÈNES RÉELS AVEC GRADIENT À SINGULARITÉ ISOLÉE

par H.-M. MAIRE

RÉSUMÉ. Les niveaux et sous-niveaux d'un polynôme réel homogène de degré $m \geqslant 2$ avec gradient à singularité isolée en 0 (i.e., avec hessien non dégénéré) ont la même homologie que les niveaux et sous-niveaux d'une forme quadratique non dégénérée. L'existence de tels polynômes pour m pair $\geqslant 6$ avec hessien d'indice quelconque est établie. On montre par contre que le hessien de tout polynôme homogène de degré 4 en au moins 3 variables dont l'indice est différent de 0 et n en un point, dégénère en dehors de l'origine.

1. INTRODUCTION

Pour deux entiers $m, n \geqslant 2$, soit $H_n^{(m)}$ l'ensemble des polynômes réels P à n variables, homogènes de degré m dont le gradient $P' : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ a une singularité isolée en 0, en d'autres termes, tels que la matrice hessienne

$$P''(x) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_k}(x) \right)_{1 \leqslant j, k \leqslant n}$$

est non dégénérée pour tout $x \in \mathbf{R}^n \setminus 0$, c'est-à-dire

$$(1) \qquad x \in \mathbf{R}^n, \quad \det P''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 .$$

Si P appartient à $H_n^{(m)}$, la relation d'Euler $P''(x)x = (m-1)P'(x)$ donne

$$(2) \qquad x \in \mathbf{R}^n, \quad P'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 ,$$

donc P a aussi une singularité isolée en 0. De plus, l'indice de Morse $\operatorname{ind} P''(x)$ (= nombre de valeurs propres négatives) de la forme quadratique

---

Mots-clés: fonction de Morse — hessien — singularités isolées.
Classification AMS: 14G30 - 57R.

$h \mapsto \langle P''(x)h \mid h \rangle$ est constant pour $x \in \mathbf{R}^n \setminus 0$, car $n \geqslant 2$. Pour $0 \leqslant p \leqslant n$ et $q = n - p$, soit

$$H_{p,q}^{(m)} = \{P \in H_n^{(m)} \mid \operatorname{ind} P''(x) = p, \ \forall x \neq 0\} .$$

On a bien sûr: $H_n^{(m)} = \cup_{p=0}^n H_{p,q}^{(m)}$.

Quand $m = 2$, l'ensemble $H_{p,q}^{(2)}$ s'identifie à l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées d'indice p sur $\mathbf{R}^n$. Mais si m est supérieur à 2, il n'est pas immédiat de trouver un polynôme homogène de degré m satisfaisant à (1), avec hessien *indéfini*. Les polynômes *harmoniques* sont de bons candidats si n est égal à 2 (cf. Exemple (2.1)), mais pas en dimension supérieure. En effet, H. Lewy [6], puis B. Segre [9] et V.E. Galafassi [4] ont montré qu'il n'existe pas de polynôme harmonique dans $H_n^{(m)}$ si $m > 2$ et $n > 2$.

Dans cet article, nous répondons aux questions suivantes:

Pour quelles valeurs de m, p *et* q*, l'ensemble* $H_{p,q}^{(m)}$ *est-il non vide?*

Pour P *dans* $H_{p,q}^{(m)}$*, quel est le nombre de composantes connexes de* $P^{-1}(0) \setminus \{0\}$*?*

Quels sont les nombres de Betti des variétés de niveaux de $P: \{P = \alpha\}$*, respectivement des variétés de sous-niveaux de* $P: \{P \leqslant \alpha\}$*?*

L'étude de $H_{p,q}^{(m)}$ est motivée par les résultats de Helffer-Nourrigat et de l'auteur sur l'hypoellipticité maximale du système de Cauchy-Riemann induit sur une hypersurface de $\mathbf{C}^{n+1}$, cf. [5] et [7]. Il est facile de vérifier que si $P \in H_{p,q}^{(m)}$ et $p, q \neq j$ alors l'hypersurface tubulaire de $\mathbf{C}^{n+1}$ définie par $\operatorname{Re} z_0 = P(\operatorname{Re} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_n)$ satisfait la condition de Derridj $D(j)$ qui est nécessaire pour l'hypoellipticité maximale de $\bar{\partial}_b$ sur les $(0, j)$-formes. La connectivité des sous-niveaux de P est utile pour montrer que $D(j)$ est aussi suffisante.

Le plan de l'article est le suivant. Au paragraphe 2, une liste d'exemples ou contre-exemples simples illustre les différents cas exceptionnels: $n = 2$, $p = 0$ ou $m = 4$ et génériques: $m \geqslant 6$. Les résultats principaux sont énoncés au paragraphe 3 et démontrés au paragraphe 4.

2. Exemples et cas particuliers

(2.1) Exemple. *Pour* $m \geqslant 2$ *le polynôme* $P(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^m$ *appartient à* $H_{1,1}^{(m)}$

Preuve. Si $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est une fonction holomorphe, les équations de Cauchy-Riemann donnent