

# 1. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## POLYNÔMES HOMOGÈNES RÉELS AVEC GRADIENT À SINGULARITÉ ISOLÉE

par H.-M. MAIRE

RÉSUMÉ. Les niveaux et sous-niveaux d'un polynôme réel homogène de degré  $m \geq 2$  avec gradient à singularité isolée en 0 (i.e., avec hessien non dégénéré) ont la même homologie que les niveaux et sous-niveaux d'une forme quadratique non dégénérée. L'existence de tels polynômes pour  $m$  pair  $\geq 6$  avec hessien d'indice quelconque est établie. On montre par contre que le hessien de tout polynôme homogène de degré 4 en au moins 3 variables dont l'indice est différent de 0 et  $n$  en un point, dégénère en dehors de l'origine.

### 1. INTRODUCTION

Pour deux entiers  $m, n \geq 2$ , soit  $H_n^{(m)}$  l'ensemble des polynômes réels  $P$  à  $n$  variables, homogènes de degré  $m$  dont le gradient  $P': \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  a une singularité isolée en 0, en d'autres termes, tels que la matrice hessienne

$$P''(x) = \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_k} (x) \right)_{1 \leq j, k \leq n}$$

est non dégénérée pour tout  $x \in \mathbf{R}^n \setminus 0$ , c'est-à-dire

$$(1) \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad \det P''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Si  $P$  appartient à  $H_n^{(m)}$ , la relation d'Euler  $P''(x)x = (m-1)P'(x)$  donne

$$(2) \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad P'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,$$

donc  $P$  a aussi une singularité isolée en 0. De plus, l'indice de Morse  $\text{ind } P''(x)$  (= nombre de valeurs propres négatives) de la forme quadratique

---

*Mots-clés:* fonction de Morse — hessien — singularités isolées.

*Classification AMS:* 14G30 - 57R.

$h \mapsto \langle P''(x)h | h \rangle$  est constant pour  $x \in \mathbf{R}^n \setminus 0$ , car  $n \geq 2$ . Pour  $0 \leq p \leq n$  et  $q = n - p$ , soit

$$H_{p,q}^{(m)} = \{P \in H_n^{(m)} \mid \text{ind } P''(x) = p, \forall x \neq 0\}.$$

On a bien sûr:  $H_n^{(m)} = \bigcup_{p=0}^n H_{p,q}^{(m)}$ .

Quand  $m = 2$ , l'ensemble  $H_{p,q}^{(2)}$  s'identifie à l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées d'indice  $p$  sur  $\mathbf{R}^n$ . Mais si  $m$  est supérieur à 2, il n'est pas immédiat de trouver un polynôme homogène de degré  $m$  satisfaisant à (1), avec hessien *indéfini*. Les polynômes *harmoniques* sont de bons candidats si  $n$  est égal à 2 (cf. Exemple (2.1)), mais pas en dimension supérieure. En effet, H. Lewy [6], puis B. Segre [9] et V.E. Galafassi [4] ont montré qu'il n'existe pas de polynôme harmonique dans  $H_n^{(m)}$  si  $m > 2$  et  $n > 2$ .

Dans cet article, nous répondons aux questions suivantes:

*Pour quelles valeurs de  $m, p$  et  $q$ , l'ensemble  $H_{p,q}^{(m)}$  est-il non vide?*

*Pour  $P$  dans  $H_{p,q}^{(m)}$ , quel est le nombre de composantes connexes de  $P^{-1}(0) \setminus \{0\}$ ?*

*Quels sont les nombres de Betti des variétés de niveaux de  $P: \{P = \alpha\}$ , respectivement des variétés de sous-niveaux de  $P: \{P \leq \alpha\}$ ?*

L'étude de  $H_{p,q}^{(m)}$  est motivée par les résultats de Helffer-Nourrigat et de l'auteur sur l'hypoellipticité maximale du système de Cauchy-Riemann induit sur une hypersurface de  $\mathbf{C}^{n+1}$ , cf. [5] et [7]. Il est facile de vérifier que si  $P \in H_{p,q}^{(m)}$  et  $p, q \neq j$  alors l'hypersurface tubulaire de  $\mathbf{C}^{n+1}$  définie par  $\text{Re } z_0 = P(\text{Re } z_1, \dots, \text{Re } z_n)$  satisfait la condition de Derridj  $D(j)$  qui est nécessaire pour l'hypoellipticité maximale de  $\bar{\partial}_b$  sur les  $(0, j)$ -formes. La connectivité des sous-niveaux de  $P$  est utile pour montrer que  $D(j)$  est aussi suffisante.

Le plan de l'article est le suivant. Au paragraphe 2, une liste d'exemples ou contre-exemples simples illustre les différents cas exceptionnels:  $n = 2$ ,  $p = 0$  ou  $m = 4$  et génériques:  $m \geq 6$ . Les résultats principaux sont énoncés au paragraphe 3 et démontrés au paragraphe 4.

## 2. EXEMPLES ET CAS PARTICULIERS

(2.1) EXEMPLE. *Pour  $m \geq 2$  le polynôme  $P(x, y) = \text{Re}(x + iy)^m$  appartient à  $H_{1,1}^{(m)}$*

*Preuve.* Si  $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  est une fonction holomorphe, les équations de Cauchy-Riemann donnent