3. Preuve du théorème 3

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

3. Preuve du théorème 3

Le théorème 3 se prouve par des modifications simples de la preuve du théorème 2. Nous préférons indiquer une preuve rapide qui donne le résultat pour un c *générique*.

Cette preuve suppose une hypothèse d'analyticité, aussi nous limiterons-nous au cas où la métrique riemannienne de X est euclidienne: X est un polygone strictement convexe du plan euclidien.

Cette preuve s'appuie sur le théorème de Whitney-Menger ([BE] p. 199, [W]).

Un graphe est dit 3-*connexe* si on ne le déconnecte pas en ôtant 2 sommets arbitraires. Le 1-squelette d'une triangulation d'une surface est 3-connexe.

Théorème. *Dans un graphe 3-connexe, 2 sommets disjoints peuvent être joints par 3 chemins sans points communs.*

Prouvons maintenant le théorème 3 pour un c générique; il est clair qu'il suffit de prouver que les triangles $\Phi(T)$ image des triangles de X_0 sont non dégénérés, car l'argument de courbure donne ensuite le résultat final comme dans le §2.

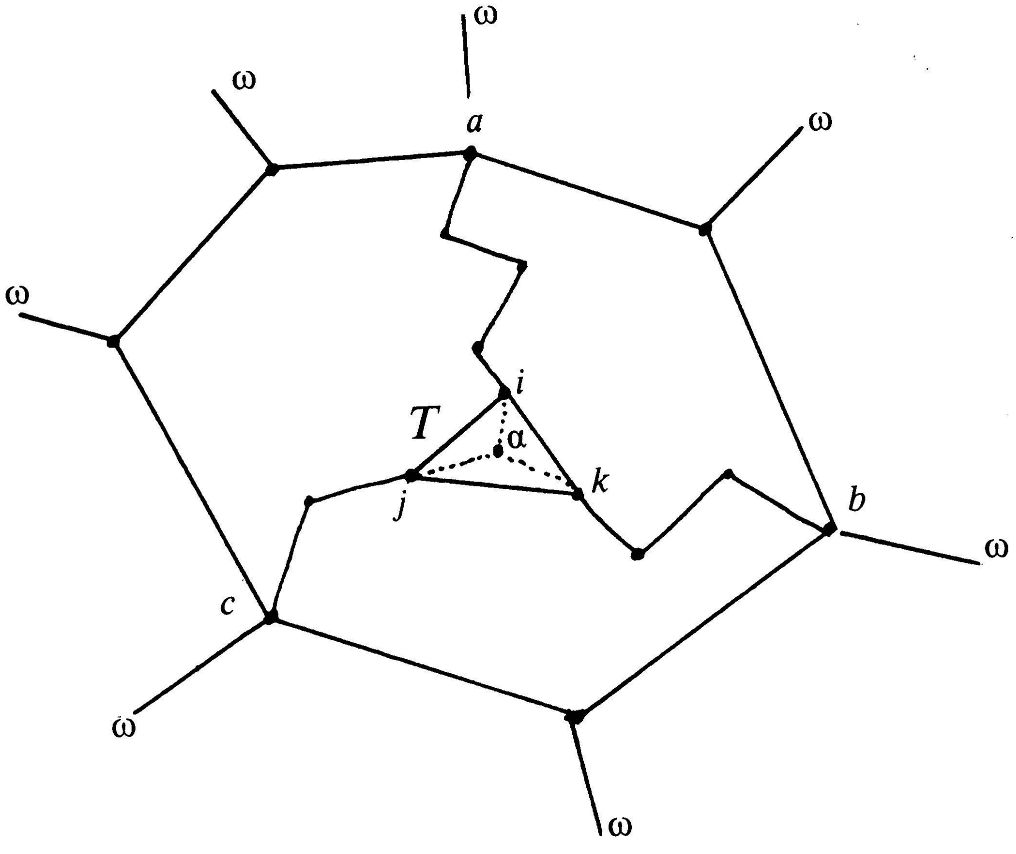

Figure 4

Montrons que pour tout T, l'ensemble Ω_T des c pour lesquels $\Phi(T)$ est non dégénéré est un ouvert dense:

c'est un ouvert (dépendance continue de φ par rapport à c). Le complémentaire de cet ouvert est donné par des relations algébriques, car le système d'équations donnant les coordonnées des images par φ des sommets est un système linéaire dont les coefficients sont les $c_{i,j}$.

Il suffit de montrer que cet ouvert est non vide. Par le théorème de Whitney-Menger, il y a dans Γ_0 3 chemins sans points communs joignant les 3 sommets i, j, k de T à 3 points a, b, c du bord de X_0 (fig. 4). Il suffit d'appliquer le théorème au graphe obtenu en ajoutant à Γ_0 2 sommets, un α dans T avec 3 arêtes le joignant aux 3 sommets de T et un ω joint par des arêtes à chaque sommet du bord de X_0. On applique le théorème aux sommets α et ω.

On considère maintenant les coefficients c tels que les coefficients des arêtes des 3 chemins tendent vers $+\infty$, les autres restant fixés. A la limite les images des sommets i, j, k de T vont coïncider avec les images de a, b, c qui sont 3 sommets distincts du bord de X; le triangle $\Phi(T)$ sera donc non dégénéré.

Maintenant l'ouvert $\Omega = \cap_T \Omega_T$ est une intersection finie d'ouverts denses, donc lui-même un ouvert dense. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[BE] BERGE, C. *Graphes et hypergraphes*. Dunod, 1973.

[CH] CHOQUET, G. Sur un type de transformation analytique... défini au moyen de fonctions harmoniques. *Bull. Sci. Math. (2) 69* (1945), 156-165.

[CV1] COLIN DE VERDIÈRE, Y. Empilements de cercles: convergence d'une méthode de points fixe. *Forum math. 1* (1989), 395-402.

[CV2] —— Un principe variationnel pour les empilements de cercles. *Invent. Math. 104,* (1991), 655-669.

[FY] FARY, I. On straight line representation of planar graphs. *Acta Sci. Math. Szeged 11* (1948), 229-233.

[J-S] JOST, J. and R. SCHOEN. On the existence of harmonic diffeomorphisms between surfaces. *Invent. Math. 66* (1982), 353-359.

[KG] KLINGENBERG, W. *Lectures on closed geodesics*. Grundlehren der Math. Wissens. (Springer), 1978.

[KN] KNESER, H. Lösung der Aufgabe 41. *Jahr. Deutsch. Math. Ver. 35* (1926), 123-124.