

§3. An application of Murasugi's congruence

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

covers of $\Sigma - K$ and $\bar{\Sigma} - \bar{K}$ respectively. Let $\Delta_K(t) = \prod_{i>0} [H_i(X)]^{(-1)^{i+1}}$ and $\Delta_{\bar{K}}(t) = \prod_{i>0} [H_i(\bar{X})]^{(-1)^{i+1}}$. The Wang sequence shows that multiplication by $t - 1$ induces an isomorphism on $H_i(X)$ for $i > 0$, so that if we take the polynomial represented by $[H_i(X)]$ and plug in $t = 1$ we get ± 1 . (Indeed if we consider the ring homomorphism $\phi: \mathbf{Z}[t, t^{-1}] \rightarrow \mathbf{Z}$ defined by $\phi(t) = 1$, then $\phi([H_i(X)])$ is a divisor of $[H_i(X) \otimes_{\mathbf{Z}[t, t^{-1}]} \mathbf{Z}] = [0] = 1 \in \mathbf{Z}/\mathbf{Z}^*$.) Thus $[H_i(X)]$ represented a non-zero element in $\mathbf{F}_p[t, t^{-1}]$, and hence $\Delta_K(t)$ and $\Delta_{\bar{K}}(t)$ give well-defined elements of $\mathbf{F}_p(t)^*/\mathbf{F}_p[t, t^{-1}]^*$. Then the considerations of §1 show:

THEOREM 2.3. *Let K be a G -periodic knot in a homology q -sphere Σ with fixed set B , where G is a group of prime power order p^r . Let λ be the linking number of K and B . Then*

$$\Delta_K(t) \equiv \Delta_{\bar{K}}(t)^{p^r} (1 + t + \dots + t^{\lambda-1})^{p^r-1} \pmod{p}.$$

§3. AN APPLICATION OF MURASUGI'S CONGRUENCE

For any $\lambda \equiv \pm 1 \pmod{8}$, T. tom Dieck and J. Davis [D-D] constructed a 2-component link with linking number λ in a homology 3-sphere Ω whose $C_2 \times C_2$ -cover branched over the link is a homology 3-sphere Σ . We will show that this congruence condition is necessary. Equivalently, we show

THEOREM 3.1. *Suppose the Klein 4-group $G \times H \cong C_2 \times C_2$ acts on a homology 3-sphere Σ so that the fixed sets Σ^G and Σ^H are disjoint circles. Then their linking number λ is congruent to ± 1 modulo 8.*

Proof. We have

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \rightarrow & \Sigma/G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma/H & \rightarrow & \Sigma/(G \times H). \end{array}$$

All four of these manifolds are homology 3-spheres and each has two disjoint circles given by the images of the fixed sets. The linking numbers of each pair of circles are all equal.

Let $K = \Sigma^G/G \subset \Sigma/G$ and $\bar{K} = K/H \subset \Sigma/(G \times H)$. Then K is a knot of period 2. Renormalize $\Delta_K(t)$ and $\Delta_{\bar{K}}(t) \in \mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ so that $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$, $\Delta_{\bar{K}}(t) = \Delta_{\bar{K}}(t^{-1})$, and $\Delta_K(1) = 1 = \Delta_{\bar{K}}(1)$. Murasugi's congruence shows

$$(**) \quad \Delta_K(t) = \Delta_{\bar{K}}(t)^2(t^{(1-\lambda)/2} + \dots + 1 + \dots + t^{(\lambda-1)/2}) + 2f(t),$$

where $f(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ satisfies $f(t) = f(t^{-1})$. Writing

$$f(t) = a_n t^{-n} + \dots + a_0 + \dots + a_n t^n,$$

we see $f(1) \equiv f(-1) \pmod{4}$. Since $\Sigma \rightarrow \Sigma/G$ is a 2-fold cover branched over K , $|\Delta_K(-1)| = |H_1(\Sigma)| = 1$. So $1 = \Delta_K(1) \equiv \Delta_K(-1) \pmod{4}$, and we see $\Delta_K(-1) = 1$. Take equation (**) and plug in $t = 1$ and $t = -1$:

$$1 = 1 \cdot \lambda + 2 \cdot f(1)$$

$$1 = 1 \cdot (-1)^{(\lambda-1)/2} + 2 \cdot f(-1).$$

Thus $\lambda \equiv (-1)^{(\lambda-1)/2} \pmod{8}$ so $\lambda \equiv \pm 1 \pmod{8}$.

Applying the high-dimensional version of Murasugi's congruence one sees that if $G \times H \cong C_2 \times C_2$ acts on a homology q -sphere Σ so that Σ^G is a homology $q-2$ sphere and Σ^H is a circle disjoint from Σ^G , then their linking number λ is congruent to ± 1 modulo 8. This and considerations from L -theory lead us to conjecture that if $G \times H \cong C_2 \times C_2$ acts on a homology q -sphere Σ so that Σ^G is a homology k -sphere and Σ^H is a homology $q-k-1$ -sphere disjoint from Σ^G , then their linking number λ is congruent to ± 1 modulo 8.

Acknowledgements. This work was partially supported by an NSF Postdoctoral Fellowship and an NSF grant. We would like to thank Alejandro Adem for a careful reading of an earlier version of this manuscript.

REFERENCES

- [C] da CRUZ, R. N. *Periodic knots*. Thesis (New York University 1987).
- [D-D] DAVIS, J. F. and T. TOM DIECK. Some exotic dihedral actions on spheres. *Indiana Univ. Math. J.* 37 (1988), 431-450.
- [F] FLOYD, E. On periodic maps and the Euler characteristics of associated spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 72 (1952), 138-147.
- [H] HILLMAN, J. A. New proofs of two theorems on periodic knots. *Arch. Math. (Basel)* 37 (1981), 457-461.