3.1. Structure sur les tubes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Remarque. La proposition reste vraie si on remplace le $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ ayant permis de construire l'anse $\mathscr{V}$ par une variété presque complexe V dont la forme d'intersection est définie positive et de type I (c'est-à-dire prend des valeurs paires et impaires). La démonstration est identique: la forme $2bc + Q_V(d)$ prend la valeur -1 (si d est tel que $Q_V(d) = 2m - 1$, on prend $b = 1$ et $c = -m$), elle est donc équivalente (sur $\mathbf{Z}$) à $-x^2 + Q(y)$ où Q est une forme quadratique entière de rang $b_2(V) + 1$ et de signature $\sigma(V) + 1$ donc définie positive. Un modèle minimal de notre variété aura une courbe rationelle à auto-intersection positive et une forme d'intersection $a^2 + Q(y)$ ce qui n'est pas possible pour les mêmes raisons.

3. Appendice: Sommes connexes de variétés symplectiques

3.1. Structure sur les tubes

Naïvement, on pourrait espérer construire une forme symplectique «somme connexe» en faisant la chirurgie sur des disques contenus dans des ouverts de Darboux et en construisant une forme symplectique sur le tube $S^{2n-1} \times I$ qui se recolle de chaque côté avec la structure standard de $\mathbf{R}^{2n}$ – Disque. Les remarques précédentes impliquent qu'une telle forme n'existe certainement pas en dimension $\neq 2$ ou 6. Les arguments utilisés sont assez grossiers (structure presque complexe au lieu de forme symplectique) et, en réponse à ma question sur la dimension 6, Dusa McDuff [6] m'a fourni un argument plus fin, basé sur les techniques de Gromov [3], que je vais décrire maintenant et qui montre qu'une telle forme n'existe sur aucun tube $S^{2n-1} \times I$ (pour $n \geqslant 2$).

3.2. Le contre-exemple

Il suffit donc d'exhiber deux variétés symplectiques de dimension 6, (V_1, ω_1) et (V_2, ω_2) telles que sur $W = V_1 \# V_2$, aucune forme symplectique ω ne puisse avoir, en restriction à V_1, une propriété que possède ω_1.

Proposition 3.2.1. [3, 2.4.B_3], [6.9] *Sur* $W = \mathrm{P}^n(\mathbf{C}) \# T^{2n}$, *il n'existe aucune forme symplectique* ω *qui admette* $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ *comme sous-variété symplectique.*

Remarque. D'après 1.2 et [9], $\mathbf{P}^3(\mathbf{C}) \# T^6$ possède des structures presque complexes.