

2.3. Anses d'indice 1

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$c_1^2 - 3c_2 = 5n + 4 - 3(n + 2) = 2n - 2 \leq 0$$

ce qui n'est possible que pour $n = 1$.

Plus généralement, on peut construire par cette « chirurgie » de nombreuses variétés presque complexes sans structure complexe puisque l'opération augmente c_1^2 de 1 et diminue $3c_2$ de 2.

2.3. ANSES D'INDICE 1

On peut jouer au même jeu avec des chirurgies d'indice supérieur. On trouve toujours une impossibilité à la chirurgie ordinaire, mais une possibilité d'ajouter une anse presque complexe. A titre d'exemple simple, détaillons ici le cas des anses d'indice 1.

On choisit un plongement à fibré normal trivial de S^1 dans W (resp. V). On écrit comme plus haut $\mathcal{W} = \overline{W - S^1 \times B^3}$, et $\mathcal{V} = \overline{V - S^1 \times B^3}$ (V est la variété inconnue, que l'on suppose simplement connexe). Les mêmes méthodes que ci-dessus fonctionnent pour donner

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow H_2 \mathcal{W} \rightarrow H_2 V \rightarrow 0$$

($H_2 \mathcal{W}$ est somme de $H_2 V$ et du facteur \mathbf{Z} engendré par une sphère $* \times S^2 = \partial(* \times B^3)$ fibre du fibré en sphères normal à S^1). Supposons W simplement connexe, on a de même

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow H_2 \mathcal{W} \rightarrow H_2 W \rightarrow 0$$

et Mayer-Vietoris donne

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow H_2 \mathcal{W} \oplus H_2 \mathcal{V} \rightarrow H_2 W^* \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

(les deux sphères sont les mêmes dans W^*).

Ainsi $b_2(W^*) = b_2(W) + b_2(V) + 2$, $\sigma(W^*) = \sigma(W) + \sigma(V)$: on a rajouté un facteur hyperbolique comme on s'en convainc agréablement en imaginant que $W = V = S^4$ et donc que $W^* = S^2 \times S^2$; de plus $\chi(W^*) = \chi(W) + \chi(V)$.

Si x est la première classe de Chern de W , l'équation à résoudre est

$$(4) \quad Q_W(x) + Q_V(y) + 2uv = 2(\chi(W) + \chi(V)) + 3(\sigma(V) + \sigma(W))$$

où x et y sont caractéristiques et u et v sont pairs.

Cette fois on peut prendre pour V n'importe quelle variété presque complexe (avec y le c_1 d'une structure presque complexe) avec u ou v nul; on peut aussi choisir $u = v = 2$ (ce qui correspond à la structure complexe usuelle dans le cas de $S^2 \times S^2$)... et V et y comme ci-dessus ($2uv = 8$).

Appelons *anse presque complexe d'indice 1* le choix de \mathcal{V} obtenu à partir de $V = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ avec la structure complexe usuelle (alors $uv = 0$). On a comme plus haut :

PROPOSITION 2.3.1. *Il n'existe aucune structure complexe intégrable (resp. symplectique) sur l'anse presque complexe d'indice 1 qui se recolle à la structure usuelle de $\mathbf{C}^2 - S^1 \times B^3$ (où $S^1 \times B^3$ est un voisinage tubulaire d'un petit cercle standard de \mathbf{C}^2).*

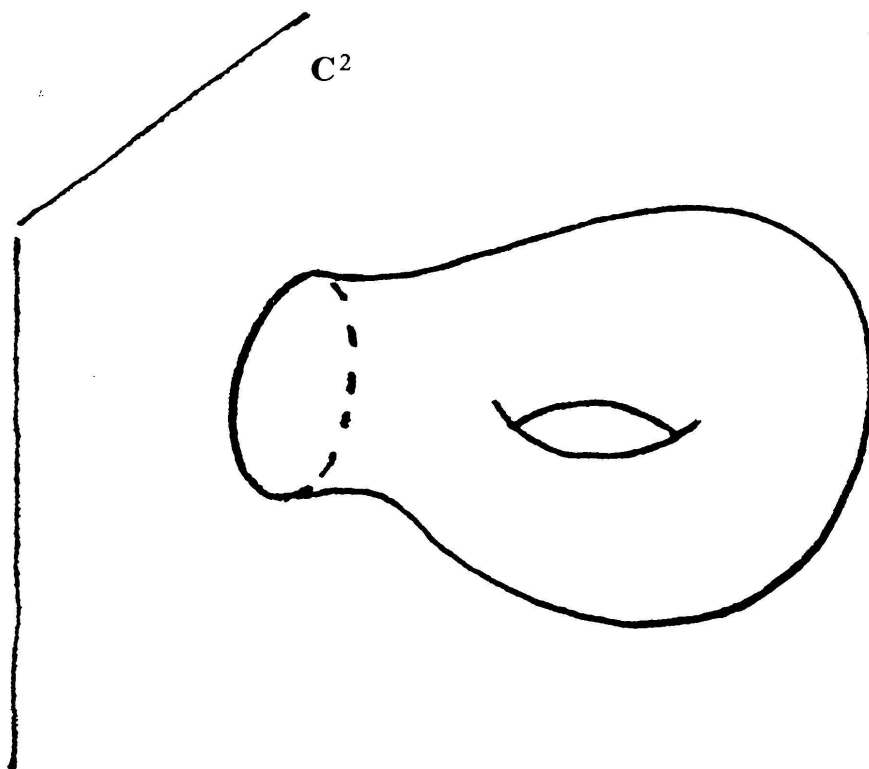


FIGURE 6

Démonstration. Supposons qu'une telle structure existe. En plongeant \mathbf{C}^2 dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ on construit une variété complexe (resp. symplectique) compacte dont la forme d'intersection s'écrit $a^2 + 2bc + d^2$ et qui contient une courbe rationnelle plongée (une droite projective de l'exemplaire de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ obtenu en complétant le \mathbf{C}^2 standard) d'auto-intersection $+1$. La forme $2bc + d^2$ est équivalente (sur \mathbf{Z}) à $-x^2 + y^2 + z^2$ ce qui fait qu'un modèle minimal de notre surface complexe (variété symplectique) va être une surface avec forme d'intersection $a^2 + y^2 + z^2$ et une courbe rationnelle à auto-intersection $+1$ (nous n'avons pas modifié le a^2). Ceci est interdit comme plus haut. \square

Remarque. La proposition reste vraie si on remplace le $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ ayant permis de construire l'anse \mathcal{V} par une variété presque complexe V dont la forme d'intersection est définie positive et de type I (c'est-à-dire prend des valeurs paires et impaires). La démonstration est identique: la forme $2bc + Q_V(d)$ prend la valeur -1 (si d est tel que $Q_V(d) = 2m - 1$, on prend $b = 1$ et $c = -m$), elle est donc équivalente (sur \mathbf{Z}) à $-x^2 + Q(y)$ où Q est une forme quadratique entière de rang $b_2(V) + 1$ et de signature $\sigma(V) + 1$ donc définie positive. Un modèle minimal de notre variété aura une courbe rationnelle à auto-intersection positive et une forme d'intersection $a^2 + Q(y)$ ce qui n'est pas possible pour les mêmes raisons.

3. APPENDICE: SOMMES CONNEXES DE VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES

3.1. STRUCTURE SUR LES TUBES

Naïvement, on pourrait espérer construire une forme symplectique «somme connexe» en faisant la chirurgie sur des disques contenus dans des ouverts de Darboux et en construisant une forme symplectique sur le tube $S^{2n-1} \times I$ qui se recolle de chaque côté avec la structure standard de \mathbf{R}^{2n} - Disque. Les remarques précédentes impliquent qu'une telle forme n'existe certainement pas en dimension $\neq 2$ ou 6 . Les arguments utilisés sont assez grossiers (structure presque complexe au lieu de forme symplectique) et, en réponse à ma question sur la dimension 6 , Dusa McDuff [6] m'a fourni un argument plus fin, basé sur les techniques de Gromov [3], que je vais décrire maintenant et qui montre qu'une telle forme n'existe sur aucun tube $S^{2n-1} \times I$ (pour $n \geq 2$).

3.2. LE CONTRE-EXEMPLE

Il suffit donc d'exhiber deux variétés symplectiques de dimension 6 , (V_1, ω_1) et (V_2, ω_2) telles que sur $W = V_1 \# V_2$, aucune forme symplectique ω ne puisse avoir, en restriction à V_1 , une propriété que possède ω_1 .

PROPOSITION 3.2.1. [3, 2.4.B₃], [6.9] *Sur $W = \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \# T^{2n}$, il n'existe aucune forme symplectique ω qui admette $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ comme sous-variété symplectique.*

Remarque. D'après 1.2 et [9], $\mathbf{P}^3(\mathbf{C}) \# T^6$ possède des structures presque complexes.