1. Rappels sur les arbres

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Nous avions démontré le théorème ci-dessus quand nous avons réalisé qu'il était presque entièrement dû à Nebbia ([N2], Theorem 1); Nebbia était surtout préoccupé par la non-moyennabilité des sous-groupes fermés de Aut X, de sorte qu'il n'a énoncé que l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iv), et ce pour les sous-groupes fermés de Aut X; mais l'extension aux sous-groupes quelconques est immédiate. Quant à l'équivalence (iii) $\Leftrightarrow$ (iv), elle transparaît dans la preuve (voir d'ailleurs la remarque 3 à la page 375 de [N2]). Mentionnons aussi que Woess a montré comment modifier l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iv) quand on s'intéresse aux sous-groupes du groupe des automorphismes d'un graphe localement fini ([Wo], Theorems 1, 2).

D'autres portions du théorème apparaissent ailleurs dans la littérature; ainsi, l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) a été obtenue par Culler et Morgan ([CM], Theorem 2.7), dans le contexte plus général des arbres réels, mais sous l'hypothèse supplémentaire que le groupe G contient un automorphisme hyperbolique. Cette hypothèse est en fait superflue, comme le montre un résultat de Tits ([T1], Proposition 3.4) dans le cas des arbres ordinaires, et un résultat de Tignol ([Ti], Proposition 2.4) dans le cas des arbres réels[4]). Notre apport consiste donc essentiellement à donner une présentation unifiée de tous ces résultats, à simplifier les preuves, et à relier les résultats à quelques problèmes classiques.

L'article se présente comme suit: au §1, nous donnons les rappels nécessaires sur les arbres, leurs automorphismes, et leurs bouts. La preuve du théorème occupe les §§2 à 4, selon le schéma (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i); nous avons aussi regroupé au §3 quelques rappels sur la moyennabilité. Le §5 est consacré aux corollaires du théorème. Enfin, au §6, nous discutons le cas des arbres réels, et montrons que l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) du théorème subsiste pour les groupes d'isométries de ces espaces.

1. Rappels sur les arbres

Un *arbre* X est un graphe connexe sans circuit (les graphes que nous considérons sont toujours non orientés, sans boucle ni arête multiple). L'arbre X est *localement fini* si tout sommet n'a qu'un nombre fini de voisins. Si x, y sont des sommets d'un arbre X, il existe un unique chemin d'arêtes

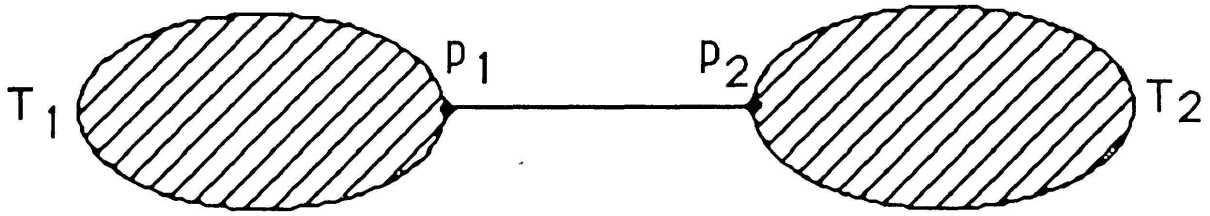
[4]) Attention à l'énoncé donné dans l'introduction de l'article de Culler et Morgan, où l'hypothèse supplémentaire a été omise! (Comparer dans [CM] le théorème au milieu de la page 573 avec le théorème 2.7, pp. 582-583).

minimal de x à y, qui est la *géodésique* de x à y; on notera $[x, y]$ l'ensemble des sommets de X sur la géodésique de x à y, et $d(x, y)$ le nombre d'arêtes sur cette géodésique: $d(x, y)$ est la *distance* de x à y (voir [Se], I.2.2).

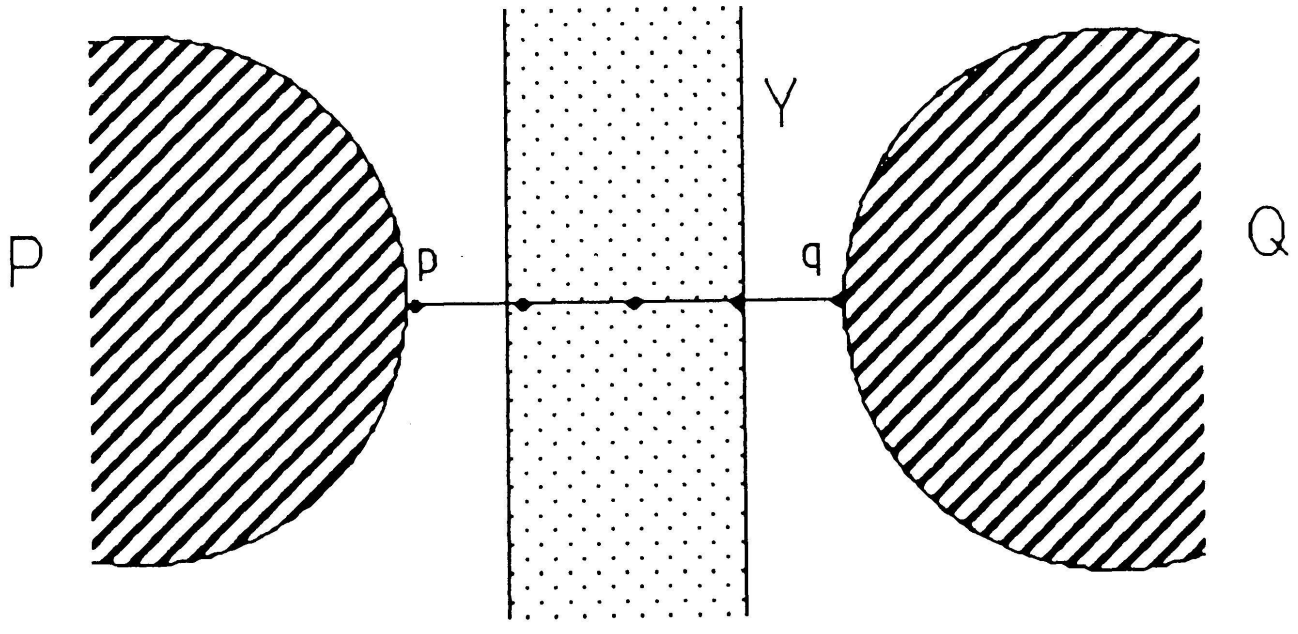
Un *sous-arbre* de l'arbre X est un sous-graphe connexe de X. Une *demi-droite* de X est un sous-arbre isomorphe à une chaîne simplement infinie:

Une *droite* («droit chemin» chez Serre, [Se] I.6.4) est un sous-arbre isomorphe à une chaîne doublement infinie:

Si T_1, T_2 sont deux sous-arbres de X, non vides et d'intersection réduite à au plus un sommet, il existe un unique couple $(p_1, p_2) \in T_1 \times T_2$ tel que tout sous-arbre de X qui rencontre T_1 et T_2 contient $[p_1, p_2]$ (voir [Se], I.6.4, lemme 9; [T3], Lemma 1.4; [CM], 1.1); la géodésique $[p_1, p_2]$ est le *pont* qui joint T_1 à T_2:

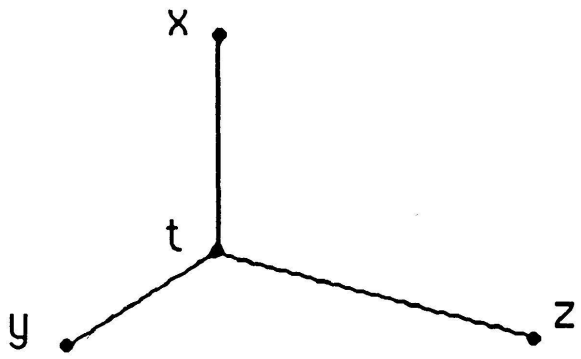


Si p, q sont deux sommets distincts fixés de X, et x un sommet quelconque, nous noterons $[x, f_{pq}(x)]$ le pont qui joint $\{x\}$ à $[p, q]$; l'application $f_{pq}: X \to [p, q]$ ainsi définie fournit les trois classes de la *partition de X associée* à $[p, q]$: $P = f_{pq}^{-1}\{p\}$; $Q = f_{pq}^{-1}\{q\}$; $Y = X - (P \cup Q)$ (la classe Y pouvant être vide si $[p, q]$ est une arête).



En particulier, si S, T sont deux sous-arbres non vides et disjoints de X, et si $[p, q]$ est le pont qui joint S à T, on a $S \subseteq P$ et $T \subseteq Q$ dans la partition ci-dessus.

Toute intersection de sous-arbres est clairement un sous-arbre. Cela permet de parler du sous-arbre engendré par une partie quelconque de X. Notons la forme du sous-arbre engendré par trois sommets x, y, z: il existe un unique sommet t tel que $\{t\} = [x, y] \cap [y, z] \cap [z, x]$.



LEMME 1 («Théorème de Helly sur un arbre»). *Soient* $T_1, T_2, \ldots, T_n$ *des sous-arbres de l'arbre* X *qui se rencontrent deux à deux. Alors leur intersection est non vide.*

Preuve. On travaille par induction sur n, en commençant par $n = 3$. Pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i < j$, faisons choix d'un sommet x_{ij} dans $T_i \cap T_j$. Soit t l'unique sommet de X tel que $\{t\} = [x_{12}, x_{13}] \cap [x_{12}, x_{23}] \cap [x_{23}, x_{13}]$. Comme $[x_{ij}, x_{ik}]$ est contenu dans T_i, on voit que t est dans $T_1 \cap T_2 \cap T_3$ (pour une autre preuve de ce cas, voir [CM] 1.2). Traitons maintenant le cas général, et considérons les $n - 1$ sous-arbres $T_1 \cap T_n, T_2 \cap T_n, \ldots, T_{n-1} \cap T_n$. Le cas $n = 3$ déjà traité montre que ces sous-arbres se rencontrent deux à deux. L'hypothèse d'induction permet donc de conclure. On trouvera une autre preuve de ce lemme dans [Se], I.6.5, lemme 10.

Un *automorphisme* de l'arbre X est une permutation g des sommets de X qui préserve les arêtes[5]). Cela revient à exiger que g soit une isométrie pour la distance d. Un résultat élémentaire mais fondamental de Tits ([T1], Proposition 3.2; voir aussi [Se], I.6.4) montre qu'un arbre peut posséder trois types d'automorphismes:

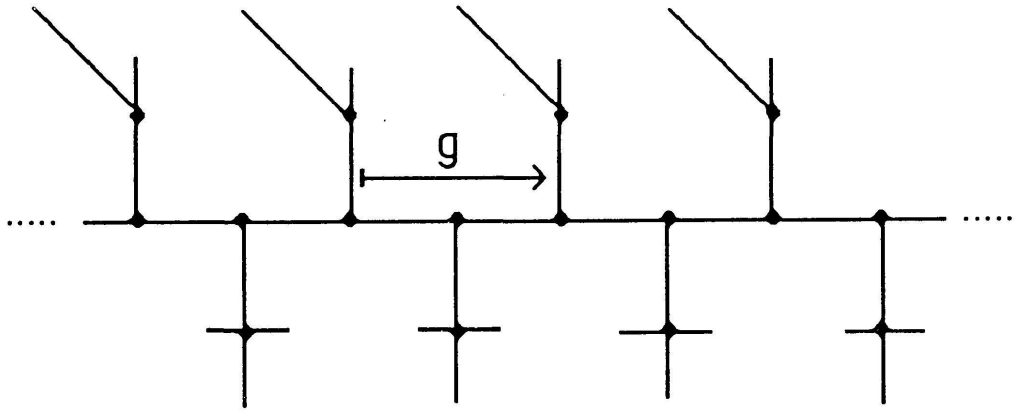
---

[5]) *Remarque:* si g est un automorphisme, g^{-1} en est un aussi (la preuve de ce fait, facile, utilise la structure d'arbre: l'énoncé correspondant sur un graphe connexe serait faux!).

— Les automorphismes qui fixent au moins un sommet. Il s'agit des automorphismes *elliptiques,* ou *rotations.* Si g est un tel automorphisme, on note X^g l'ensemble des points fixes de g; c'est un sous-arbre de X.

— Les automorphismes qui ne fixent aucun sommet, mais fixent une arête (nécessairement unique). Il s'agit des *inversions.*

— Les automorphismes qui ne fixent ni sommet, ni arête de X. Il s'agit des automorphismes *hyperboliques,* ou *translations.* Si g est un tel automorphisme, il existe une unique droite de X invariante par g; cette droite s'appelle l'*axe* de g, et g agit par translation le long de son axe.



Si g est une translation, la *distance de translation* $l(g)$ de g est l'entier

$$l(g) = \min_{x \in X} d(gx, x)$$

Il s'agit donc de l'amplitude de la translation induite par g sur son axe.

Le lemme suivant, qui aide à construire des automorphismes hyperboliques, a été remarqué par plusieurs personnes ([CM], 1.5; [Pl], lemme 5.5; [Se], I.6.5, Corollaire 1; [Ti], Corollaire 2.3; voir aussi le lemme 35 du chapitre 8 de [GH] pour une généralisation aux isométries des espaces hyperboliques à la Gromov):

LEMME 2. *Soient g, h deux rotations de l'arbre X. Si $X^g \cap X^h$ est vide, alors gh est une translation.*

Preuve. Soit $[p, q]$ le pont qui joint X^g à X^h. On voit alors, en considérant successivement les trois classes de la partition de X associée à $[p, q]$, que pour tout sommet x de X, on a $d(ghx, x) \geqslant 2 . d(p, q)$; donc gh est une translation.

Muni de la topologie de la convergence simple sur les sommets de X, le groupe $\mathrm{Aut}\, X$ des automorphismes de l'arbre X s'érige en groupe

topologique. Supposons X localement fini; pour tout sommet x, le stabilisateur $(\mathrm{Aut}\, X)_x$ de x dans $\mathrm{Aut}\, X$ est alors un sous-groupe compact ouvert; et $\mathrm{Aut}\, X$ est un groupe localement compact totalement discontinu.

LEMME 3. *Soient X un arbre localement fini, et G un sous-groupe de $\mathrm{Aut}\, X$. S'il existe un sommet x de X dont le stabilisateur dans G soit réduit au neutre, alors G est discret dans $\mathrm{Aut}\, X$.*

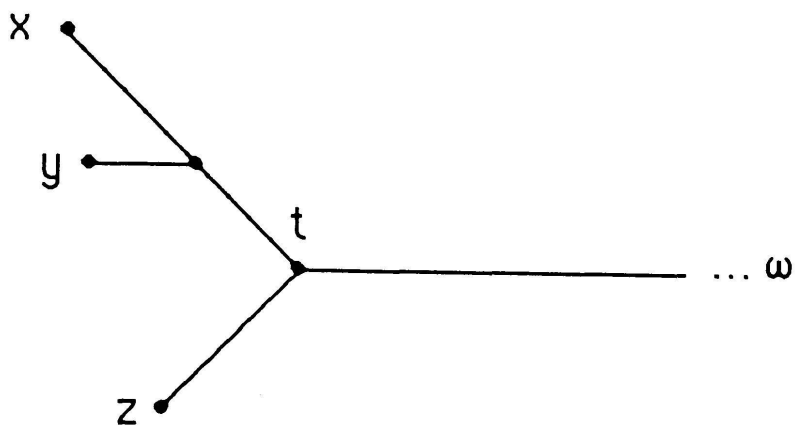
Preuve. L'intersection de G et du sous-groupe ouvert $(\mathrm{Aut}\, X)_x$ est réduite au neutre, donc G est discret.

Deux demi-droites d'un arbre X sont *équivalentes* si leur intersection est encore une demi-droite (on voit immédiatement que cette relation sur l'ensemble des demi-droites est bien une relation d'équivalence). Un *bout* de X est une classe d'équivalence de demi-droites de X; on note $\Omega(X)$ l'ensemble des bouts de X. L'action de $\mathrm{Aut}\, X$ sur les demi-droites de X passe aux classes d'équivalence, et fournit une action de $\mathrm{Aut}\, X$ sur $\Omega(X)$. On note $(\mathrm{Aut}\, X)_\omega$ le stabilisateur du bout ω dans $\mathrm{Aut}\, X$, qu'on munit de la topologie de la convergence simple sur X.

Si x est un sommet et ω un bout de X, il existe une unique demi-droite d'origine x qui représente ω; on la note $[x, \omega[$. En particulier, $\Omega(X)$ s'identifie à l'ensemble des demi-droites d'origine x.

Si x, y sont des sommets, ω un bout de X, et t un sommet sur la demi-droite $[x, \omega[\cap [y, \omega[$, la quantité $d(x, t) - d(y, t)$ est indépendante de t; on la note $d_\omega(x, y)$. On a la relation immédiate mais importante (voir [C1], § 1):

(*) $\qquad d_\omega(x, z) = d_\omega(x, y) + d_\omega(y, z)$ quels que soient $x, y, z \in X$.



Si $g \in (\mathrm{Aut}\, X)_\omega$, et si x est un sommet de X, on pose

$$l_\omega(g) = d_\omega(x, gx)$$

Le lemme suivant montrera entre autres que cette définition ne dépend pas du choix du sommet x.

LEMME 4. *Soient* X *un arbre, et* ω *un bout de* X. *Alors*

i) $(\mathrm{Aut}\, X)_\omega$ *ne contient pas d'inversion;*

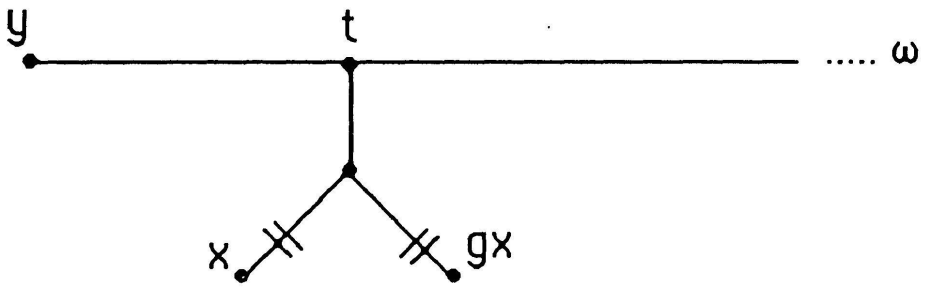
ii) $l_\omega(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \text{ est elliptique} \\ \pm\, l(g) & \text{si } g \text{ est hyperbolique} \end{cases}$

iii) $l_\omega : (\mathrm{Aut}\, X)_\omega \to \mathbf{Z}$ *est un homomorphisme continu.*

Preuve. i) Si g est une inversion et x un sommet de X, l'intersection de $[x, \omega[$ et $g[x, \omega[$ est finie. Donc $g\omega \neq \omega$.

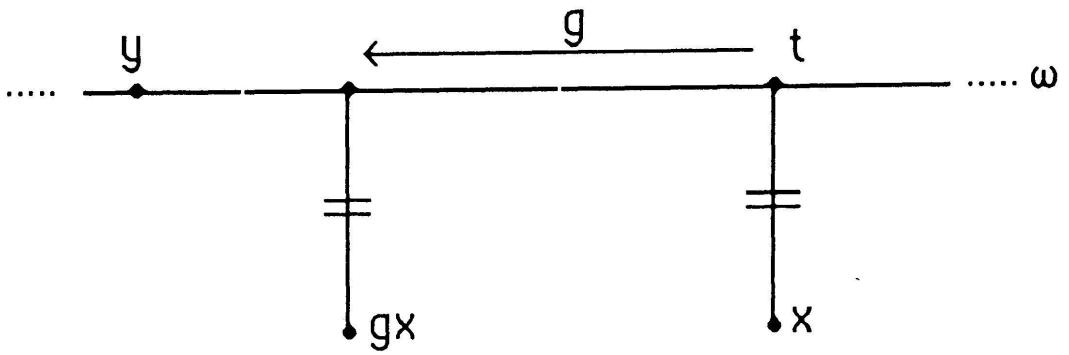
ii) Soit x le sommet apparaissant dans la définition de l_ω. Soit d'abord g un élément elliptique de $(\mathrm{Aut}\, X)_\omega$; si y est un sommet dans X^g, la demi-droite $[y, \omega[$ est fixée ponctuellement par g. Notons $[t, \omega[$ la demi-droite $[y, \omega[\cap [x, \omega[\cap [gx, \omega[$. En calculant $d_\omega(gx, x)$ par rapport à t, on a:

$$\begin{aligned} l_\omega(g) &= d(gx, t) - d(x, t) \\ &= d(gx, gt) - d(x, t) \quad \text{car } gt = t \\ &= 0 \end{aligned}$$



Soit maintenant g un élément hyperbolique de $(\mathrm{Aut}\, X)_\omega$; si y est un sommet sur l'axe de g, la demi-droite $[y, \omega[$ est contenue dans l'axe de g. Notons à nouveau $[t, \omega[$ la demi-droite $[y, \omega[\cap [x, \omega[\cap [gx, \omega[$. En calculant $d_\omega(gx, x)$ par rapport à t, on a:

$$\begin{aligned} l_\omega(g) &= d(gx, t) - d(x, t) \\ &= \begin{cases} -\, l(g) & \text{si } g \text{ pointe vers } \omega \\ l(g) & \text{si } g^{-1} \text{ pointe vers } \omega \end{cases} \end{aligned}$$



iii) La continuité de l_ω est claire. Si $g, h \in (\mathrm{Aut}\, X)_\omega$, on a pour tout sommet x de X:

$$l_\omega(gh) = d_\omega(ghx, x) = d_\omega(ghx, hx) + d_\omega(hx, x) \quad \text{(par la relation (*))}$$
$$= l_\omega(g) + l_\omega(h)$$

puisque $l_\omega(g)$ peut se calculer grâce à n'importe quel sommet de X. Ceci termine la preuve du lemme 4.

Si α et ω sont deux bouts distincts de l'arbre X, il existe une unique droite de X, notée $]\alpha, \omega[$, telle que pour tout sommet x sur cette droite, on ait:

$$]\alpha, \omega[= [x, \alpha[\cup [x, \omega[$$

On note $(\mathrm{Aut}\, X)_{\{\alpha,\omega\}}$ le stabilisateur de la paire $\{\alpha, \omega\}$ dans $\mathrm{Aut}\, X$, qu'on munit toujours de la topologie de la convergence simple. Le groupe $(\mathrm{Aut}\, X)_{\{\alpha,\omega\}}$ laisse invariant la droite $]\alpha, \omega[$. On a donc un homomorphisme de restriction $r_{\alpha\omega}$ de $(\mathrm{Aut}\, X)_{\{\alpha,\omega\}}$ dans le groupe des automorphismes de la droite $]\alpha, \omega[$, qui est le groupe diédral infini D_∞. Cet automorphisme

$$r_{\alpha\omega}: (\mathrm{Aut}\, X)_{\{\alpha,\omega\}} \to D_\infty$$

est évidemment continu.

On note $\bar{X}$ la réunion disjointe de X et de $\Omega(X)$:

$$\bar{X} = X \coprod \Omega(X)$$

Pour x, y sommets distincts de X, on pose:

$$V_{xy} = \{z \in X : y \in [x, z]\} \cup \{\omega \in \Omega(X) : y \in [x, \omega[\}$$

On munit $\bar{X}$ de la topologie dont une base est formée des V_{xy} ainsi que des parties finies de X; l'espace $\bar{X}$ devient ainsi un espace topologique séparé, dans lequel X est une partie discrète, ouverte, et dense. En fait, si T est un sous-arbre de X, son adhérence $\bar{T}$ dans $\bar{X}$ est la réunion de T et des bouts de T. Les V_{xy} sont à la fois ouverts et fermés dans $\bar{X}$, qui est totalement

discontinu. Si X est localement fini, l'espace $\bar{X}$ est compact, et fournit ainsi une compactification de l'arbre X. Enfin, les actions de $\mathrm{Aut}\, X$ sur X et $\Omega(X)$ se «recollent» en une action par homéomorphismes sur $\bar{X}$. Le lemme suivant est encore dû à Tits ([T3], Lemma 1.6).

LEMME 5. *Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille de sous-arbres de l'arbre X, qui se rencontrent deux à deux. Alors $\cap_{i\in I}\bar{T}_i$ est non vide.*

Preuve. Supposons d'abord l'arbre X localement fini. Le lemme 1 montre alors que la famille $(\bar{T}_i)_{i\in I}$ de fermés de $\bar{X}$ a la propriété d'intersection finie non vide, et la compacité de $\bar{X}$ permet de conclure. Pour ramener le cas général au cas localement fini, nous utilisons un argument de la preuve originale de Tits. Soit x un sommet fixé dans X. Notons $[x, t_i]$ le pont qui joint $\{x\}$ à T_i. Pour $i, j \in I$, on voit facilement qu'on a $[x, t_i] \subseteq [x, t_j]$ ou $[x, t_i] \supseteq [x, t_j]$, car $T_i \cap T_j$ est non vide. Donc $S = \cup_{i\in I}[x, t_i]$ est un segment géodésique ou une demi-droite, et de plus les sous-arbres de la famille $(S \cap T_i)_{i\in I}$ se rencontrent deux à deux. Comme S est localement fini, on conclut.

2. PREUVE DE L'IMPLICATION (i) ⇒ (ii) DU THÉORÈME

Nous scindons la preuve de l'implication (i) ⇒ (ii) en trois propositions qui, ensemble, la démontrent.

PROPOSITION 1. *Soient X un arbre, et G un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}\, X$. *Si G ne fixe aucun sommet, aucune arête, et aucun bout de X, alors G contient une translation.*

PROPOSITION 2. *Soient X un arbre, et G un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}\, X$ *contenant une translation. Si G ne fixe aucun bout et aucune paire de bouts de X, alors G contient deux translations d'axes disjoints.*

PROPOSITION 3. *Soient a, b deux translations d'axes disjoints dans un arbre X. Le sous-groupe $H = \langle a, b \rangle$ engendré par a et b est libre sur les deux générateurs a, b; de plus H agit librement sur X.*

Remarques. 1) Les trois propositions ci-dessus montrent que l'implication (i) ⇒ (ii) du Théorème est en fait vraie pour tout arbre, sans hypothèse