# 5. Quelques remarques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

Appliquons cette technique à la situation du lemme. Dans ce cas, l'action de $\mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}$ considérée est engendrée par $f_1$ et $f_2$ d'ordres respectifs $p$ et $q$, agissant sur $S^{2k} - \{N, S\}$. Nous obtenons que si $g$ et $h$ sont deux difféomorphismes de $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ à supports dans un ouvert $U$ assez petit de $S^{2k} - \{N, S\}$, le commutateur $[g, h]$ appartient au groupe engendré par les sous-groupes $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)\ (i = 1, 2)$. Pour conclure, il suffit de remarquer que ces commutateurs engendrent $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$. Ceci résulte de deux faits. Tout d'abord, si les ouverts $U_j$ recouvrent $S^{2k} - \{N, S\}$, les groupes $\mathrm{Diff}_{0,c}^\infty(U_j) \subset \mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ engendrent $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$; c'est le lemme de fragmentation de [6]. D'autre part, d'après le théorème de W. Thurston déjà mentionné, les groupes $\mathrm{Diff}_{0,c}^\infty(U_i)$ sont des groupes simples et donc sont engendrés par les commutateurs. $\square$

Soit $s$ l'involution isotope à l'identité définie par

$$s(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \dots, x_k + iy_k, t) = (x_1 - iy_1, -x_2 - iy_2, \dots, -x_k - iy_k, -t) .$$

Elle commute avec $C_2$ de sorte que $\sigma(s)$ préserve $I$ globalement. De plus, $s$ échange $S$ et $N$ et il existe donc un unique point $x_0$ de $I$ qui est fixe par $\sigma(s)$. Soit $W$ et $E$ les points $(-1, 0, \dots, 0)$ et $(1, 0, \dots, 0)$ de $S^{2k}$. Il est clair que l'arc analogue à $I$ joignant $W$ à $E$, formé des points fixes de $\sigma(s)$, contient $x_0$. Les deux groupes $\sigma\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ et $\sigma\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, E, W)$ fixent donc $x_0$ et leurs différentielles en $x_0$ sont triviales.

LEMME 4.5. *Les groupes* $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ *et* $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, E, W)$ *engendrent* $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k})$.

*Démonstration.* Soit $f$ un élément de $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k})$. Soit $g_1$ un élément de $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, E, W)$ qui coïncide avec $f$ au voisinage des points $N$ et $S$ et posons $g_2 = g_1^{-1} \circ f$. On a alors $g_2 \in \mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ et $f = g_1 \circ g_2$. $\square$

La contradiction cherchée est maintenant claire. Le groupe $\sigma\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k})$ tout entier fixe $x_0$ et sa différentielle en $x_0$ est triviale. Ceci est absurde puisque les éléments d'ordre fini distincts de l'identité (par exemple ceux de $\sigma(C_p)$) ne peuvent avoir une différentielle égale à l'identité en un point fixe. Ceci termine la preuve du théorème dans le cas où $n$ est pair.

## 5. QUELQUES REMARQUES

Le résultat obtenu dans cette note suggère immédiatement une question plus générale. Si $V$ est une variété à bord non vide $\partial V$, dans quelles conditions existe-t-il un morphisme de $\mathrm{Diff}_0^\infty(\partial V)$ vers $\mathrm{Diff}_0^\infty(V)$ qui «prolonge les difféomorphismes à l'intérieur»? Nous avons vu qu'un tel morphisme existe si $V$ est une bande de Moebius et n'existe pas si $V$ est une boule. Le lecteur n'aura maintenant aucune difficulté à traiter le cas général où $V$ est une surface compacte à bord. Qu'en est-il par contre si $V$ est un corps à anses de genre $g$ (i.e. le domaine de $\mathbf{R}^3$ bordé par une surface de genre $g$ plongée de manière habituelle)?

De manière analogue, on peut s'intéresser aux morphismes entre groupes de difféomorphismes de variétés fermées (i.e. compactes sans bord). Voici deux exemples.

On peut identifier l'espace projectif complexe $\mathbf{CP}^n$ au quotient de $(S^2)^n$ par l'action du groupe symétrique. Cette identification peut être obtenue de la façon suivante. Au point de coordonnées homogènes $[a_0 : a_1 : \ldots : a_n]$ de $\mathbf{CP}^n$, on associe les $n$ zéros du polynôme $a_0 z^n + \ldots + a_n$ dans $\mathbf{C} \cup \{\infty\} \simeq S^2$ qui sont définis à l'ordre près. Il est facile de vérifier qu'un difféomorphisme de classe $C^\infty$ de $S^2$ mène ainsi à un difféomorphisme de classe $C^\infty$ de $\mathbf{CP}^n$ et on a donc un morphisme naturel:

$$\mathrm{Diff}_0^\infty(S^2) \to \mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbf{CP}^n) .$$

Une deuxième construction générale s'obtient de la façon suivante. Si $V$ est une variété fermée et si $PTV$ désigne le projectifié du fibré tangent à $V$, on a un morphisme obtenu par différentielle:

$$\mathrm{Diff}_0^\infty(V) \to \mathrm{Diff}_0^\infty(PTV) .$$

On notera que $PTV$ est fermée. Ces exemples suggèrent la question qui suit:

QUESTION. *Soit* $V_1$ *et* $V_2$ *deux variétés fermées telles qu'il existe un morphisme non trivial de* $\mathrm{Diff}_0^\infty(V_1)$ *vers* $\mathrm{Diff}_0^\infty(V_2)$. *Peut-on affirmer que la dimension de* $V_1$ *est inférieure ou égale à celle de* $V_2$*?*

Les cas d'isomorphismes entre groupes de difféomorphismes ont été étudiés dans [3]: $\mathrm{Diff}_0^\infty(V_1)$ et $\mathrm{Diff}_0^\infty(V_2)$ ne sont isomorphes que si $V_1$ et $V_2$ sont difféomorphes.

Signalons enfin que les méthodes utilisées dans cet article tombent en défaut dans le contexte analytique réel (sauf lorsque $n = 1$).