4. Le cas des sphères paires

obtenue en composant la projection de $\breve{B}^{2k-2} \times S^1$ sur U_j et τ_j. On remarquera que $\tau_j(x, \theta)$ ne dépend pas de θ car τ_j est invariant par ϕ_t. Les applications

$$(x, \theta) \in \mathring{B}^{2k-2} \times S^1 \mapsto (x, \bar{A}_{\tau_j(x)}(\theta)) \in \mathring{B}^{2k-2} \times S^1$$

$$(x, \theta) \in \mathring{B}^{2k-2} \times S^1 \mapsto (x, \bar{B}_{\tau_j(x)}(\theta)) \in \mathring{B}^{2k-2} \times S^1$$

passent au quotient en des difféomorphismes de U_j à supports compacts. En prolongeant ces difféomorphismes par l'identité en dehors de U_j, on obtient des difféomorphismes $\bar{A}_{\tau_j}$ et $\bar{B}_{\tau_j}$ de S^{2k-1} qui commutent évidemment avec f. Par ailleurs,

$$[\bar{A}_{\tau_j}, \bar{B}_{\tau_j}]\,(m) = \phi_{\tau_j(m)/N}(m) \ .$$

Le difféomorphisme f coïncide avec $\phi_{1/p}$. Pour terminer la démonstration du lemme, il suffit donc d'écrire la fonction constante N/p comme somme de fonctions τ_j du type précédent:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{N}\tau_1 + \ldots + \frac{1}{N}\tau_q \ .$$

En effet, on aura alors

$$f = \phi_{1/p} = [\bar{A}_{\tau_1}, \bar{B}_{\tau_1}] \ldots [\bar{A}_{\tau_q}, \bar{B}_{\tau_q}] \ .$$

Pour cela, il suffit d'utiliser une partition de l'unité subordonnée aux U_j et d'en prendre la moyenne sous l'action de S^1 associée à ϕ_t pour la rendre invariante. □

4. Le cas des sphères paires

Nous identifierons la sphère S^{2k} à l'ensemble des points $(z_1, \ldots, z_k, t)$ de $\mathbf{C}^k \times \mathbf{R}$ tels que $|z_1|^2 + \ldots + |z_k|^2 + t^2 = 1$. Comme précédemment, nous fixons un nombre premier p et nous considérons le groupe C_p des difféomorphismes de S^{2k}, isotopes à l'identité, du type:

$$f: (z_1, \ldots, z_k, t) \in S^{2k} \mapsto (w_1 z_1, \ldots, w_k z_k, t) \in S^{2k} \ ,$$

où les w_i sont des racines p-èmes de l'unité.

Supposons encore par l'absurde qu'il existe un morphisme

$$\sigma: \mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}) \to \mathrm{Diff}_0^1(B^{2k+1})$$

qui prolonge les difféomorphismes de la sphère à la boule.

LEMME 4.1. *Il existe un unique arc* I *dans* B^{2k+1} *connectant les points* $N = (0, \dots, 0, 1)$ *et* $S = (0, \dots, 0, -1)$ *et formé de points fixés par tous les éléments de* σC_p. *Cet arc ne dépend pas de* p.

Démonstration. Comme précédemment, si aucun des w_i n'est égal à 1, le difféomorphisme f a exactement deux points fixes sur la sphère S^{2k} (les points N et S). La théorie de Smith permet alors de montrer que l'ensemble des points fixes de $\sigma(f)$ est un arc connectant N et S. Un homéomorphisme d'ordre fini d'un intervalle qui fixe les extrémités est nécessairement l'identité. Il résulte de ce fait, de la commutativité de C_p et du fait que les f pour lesquels aucun w_i n'est égal à 1 engendrent C_p qu'il existe un arc I formé de points fixes par tous les éléments de σC_p.

Puisque C_p et C_q commutent (si p et q sont deux nombres premiers quelconques), l'arc I ne dépend pas du choix de p. □

Soit x_0 un point de I. Considérons la différentielle de $\sigma(C_p)$ en x_0. On obtient ainsi un morphisme

$$D: C_p \to GL(T_{x_0}B^{2k+1}) \simeq GL(2k+1, \mathbf{R}) .$$

LEMME 4.2. *A conjugaison près, on peut supposer que l'image de* D *coïncide avec le groupe* $\overline{C_p}$ *des applications linéaires de* $\mathbf{R}^{2k+1} \simeq \mathbf{C}^k \times \mathbf{R}$ *du type:*

$$(z_1, \dots, z_k, t) \in \mathbf{C}^k \times \mathbf{R} \mapsto (\mu_1 z_1, \dots, \mu_k z_k, t) \in \mathbf{C}^k \times \mathbf{R}$$

où les μ_j *sont des racines p-èmes de l'unité.*

Démonstration. Identique à celle de 3.2. □

On choisit $p > n$ et f un élément de C_p tels que $D(f)$ soit une application linéaire du type précédent pour laquelle les μ_j sont distincts deux à deux et différents de 1. D'après ce que nous avons vu, l'ensemble des points fixes de $\sigma(f)$ coïncide alors avec I.

La démonstration se sépare ici de celle décrite au paragraphe précédent. En effet, l'élément f n'est certainement pas un produit de commutateurs dans le groupe $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, f)$ des difféomorphismes de classe C^∞, isotopes à l'identité et commutant avec f. Ceci résulte du fait que la différentielle d'un élément de $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, f)$ au point N est diagonale de sorte qu'un produit de commutateurs a une différentielle égale à l'identité en N, contrairement à f. C'est précisément ce fait qui a servi de base à la démonstration du théorème lorsque n est impair et qui nous empêche donc de généraliser la preuve au cas où n est pair.

Soit $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ le groupe des difféomorphismes de S^{2k}, coïncidant avec l'identité au voisinage de N et S et isotopes à l'identité par une isotopie à support compact dans $S^{2k} - \{N, S\}$. Notre premier but sera de montrer que $\sigma\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ fixe I point par point. Nous en déduirons l'existence d'un point x_0 de I fixe par tout le groupe $\sigma\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k})$ et il sera facile d'en déduire une contradiction.

On se fixe deux nombres premiers distincts p et q et deux éléments f_1 et f_2 de C_p et C_q respectivement, du type précédent. Soit $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ formé des éléments commutant avec f_i et isotopes à l'identité par une isotopie commutant avec $f_i (i = 1, 2)$.

LEMME 4.3. *Les groupes* $\sigma\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$ $(i = 1, 2)$ *fixent* I *point par point. De plus, les différentielles de ces difféomorphismes aux points de* I *sont égales à l'identité.*

Démonstration. Ce groupe préserve globalement l'ensemble des points fixes de $\sigma(f_i)$, c'est-à-dire I. L'action de f_i sur $S^{2k} - \{N, S\}$ est libre. Un difféomorphisme de $V_i = S^{2k} - \{N, S\}/(f_i)$ qui est l'identité au voisinage des deux bouts, et qui est isotope à l'identité par une isotopie à support compact, se relève de manière unique en un élément de $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$. En d'autres termes, $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$ est isomorphe au groupe $\mathrm{Diff}_{c,0}^\infty(V_i)$ des difféomorphismes de V_i de classe C^∞, à supports compacts, isotopes à l'identité par une isotopie à support compact. On a donc un morphisme

$$\mathrm{Diff}_{c,0}^\infty(V_i) \to \mathrm{Diff}_0^\infty(I) .$$

Il s'agit de montrer que ce morphisme est trivial.

Un théorème de W. Thurston [7] affirme que $\mathrm{Diff}_{c,0}^\infty(V_i)$ est un groupe simple. Il nous suffit donc de trouver un élément non trivial de $\sigma\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$ qui fixe I point par point pour en conclure qu'il en est de même pour tous les éléments.

Soit ϕ un élément de $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$ qui ne commute pas avec $f_j (j \in \{1, 2\} \text{ et } j \neq i)$. Puisque $\sigma(\phi)$ préserve globalement I et que $\sigma(f_j)$ fixe I point par point, le commutateur $\sigma(\phi f_j \phi^{-1} f_j^{-1})$ fixe I point par point. Il suffit alors de remarquer que $\phi f_j \phi^{-1} f_j^{-1}$ coïncide avec l'identité au voisinage de N, S, commute avec f_i, est isotope à l'identité par une isotopie commutant avec f_i et à support dans $S^{2k} - \{N, S\}$. Nous avons ainsi trouvé un élément non trivial dans le noyau du morphisme considéré et ce morphisme est donc bien trivial.

En fixant un point x_0 de I et en considérant la différentielle en x_0 d'un élément de $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$, on obtient un morphisme d'un groupe simple à valeurs dans le groupe abélien Z, centralisateur de $D(f_i)$ dans $GL(2k+1, \mathbf{R})$. Ces différentielles sont donc toutes égales à l'identité. $\square$

LEMME 4.4. *Le groupe* $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ *est engendré par les deux sous-groupes* $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$ $(i = 1, 2)$. *Ainsi, les éléments de* $\sigma\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ *fixent* I *point par point et leurs différentielles sont égales à l'identité en ces points.*

Démonstration. Je remercie C. Bavard à qui je dois cette démonstration.

Soit ϕ un difféomorphisme d'ordre pq d'une variété M. On suppose que l'action associée de $\mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}$ sur M est libre. Soit $U \subset M$ un ouvert tel que les $\phi^i(U)$ soient disjoints deux à deux (où l'exposant i est à lire dans $\mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}$). Si $g_0, g_1, \ldots, g_{pq-1}$ sont pq difféomorphismes de M à supports dans U, on notera $\{g_0, g_1, \ldots, g_{pq-1}\}$ le difféomorphisme suivant de M:

$$g_0 \circ (\phi^{-1} \circ g_1 \circ \phi^1) \circ (\phi^{-2} \circ g_2 \circ \phi^2) \circ \ldots \circ (\phi^{(-pq+1)} \circ g_{pq-1} \circ \phi^{(pq-1)}) .$$

On remarquera que tous les facteurs de cette composition commutent. Fixons deux difféomorphismes g et h de M à supports dans U et définissons $6pq$ difféomorphismes a_j^i et $b_j^i (1 \leqslant i \leqslant 3, 0 \leqslant j \leqslant pq-1)$ par:

$$\begin{array}{lllll}
a_j^1 = g & a_j^2 = \mathrm{id} & a_j^3 = h^{-1} & \text{si } j \equiv 0 & (\mathrm{mod}\, p) \\
a_j^1 = h^{-1} & a_j^2 = g & a_j^3 = \mathrm{id} & \text{si } j \not\equiv 0 & (\mathrm{mod}\, p) \\
b_j^1 = h & b_j^2 = g^{-1} & b_j^3 = \mathrm{id} & \text{si } j \equiv 0 & (\mathrm{mod}\, q) \\
b_j^1 = g^{-1} & b_j^2 = \mathrm{id} & b_j^3 = h & \text{si } j \not\equiv 0 & (\mathrm{mod}\, q) .
\end{array}$$

On pose alors, pour $i = 1, 2, 3$,

$$A_i = \{a_0^i, \ldots, a_{pq-1}^i\} \quad \text{et} \quad B_i = \{b_0^i, \ldots, b_{pq-1}^i\} .$$

On remarque que les trois difféomorphismes A_i commutent avec ϕ^p alors que les B_i commutent avec ϕ^q.

Une vérification simple (que le lecteur pourra faire d'abord lorsque $p = 2$ et $q = 3$) montre que

$$A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3 = ghg^{-1}h^{-1} .$$

Ainsi, nous avons montré que le commutateur de deux difféomorphismes à supports dans U est un produit de difféomorphismes de M commutant avec ϕ^p ou ϕ^q.

Appliquons cette technique à la situation du lemme. Dans ce cas, l'action de $\mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}$ considérée est engendrée par f_1 et f_2 d'ordres respectifs p et q, agissant sur $S^{2k} - \{N, S\}$. Nous obtenons que si g et h sont deux difféomorphismes de $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ à supports dans un ouvert U assez petit de $S^{2k} - \{N, S\}$, le commutateur $[g, h]$ appartient au groupe engendré par les sous-groupes $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)\,(i = 1, 2)$. Pour conclure, il suffit de remarquer que ces commutateurs engendrent $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$. Ceci résulte de deux faits. Tout d'abord, si les ouverts U_j recouvrent $S^{2k} - \{N, S\}$, les groupes $\mathrm{Diff}_{0,c}^\infty(U_j) \subset \mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ engendrent $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$; c'est le lemme de fragmentation de [6]. D'autre part, d'après le théorème de W. Thurston déjà mentionné, les groupes $\mathrm{Diff}_{0,c}^\infty(U_i)$ sont des groupes simples et donc sont engendrés par les commutateurs. □

Soit s l'involution isotope à l'identité définie par

$$s(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots, x_k + iy_k, t) = (x_1 - iy_1, -x_2 - iy_2, \ldots, -x_k - iy_k, -t)\,.$$

Elle commute avec C_2 de sorte que $\sigma(s)$ préserve I globalement. De plus, s échange S et N et il existe donc un unique point x_0 de I qui est fixe par $\sigma(s)$. Soit W et E les points $(-1, 0, \ldots, 0)$ et $(1, 0, \ldots, 0)$ de S^{2k}. Il est clair que l'arc analogue à I joignant W à E, formé des points fixes de $\sigma(s)$, contient x_0. Les deux groupes $\sigma\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ et $\sigma\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, E, W)$ fixent donc x_0 et leurs différentielles en x_0 sont triviales.

LEMME 4.5. *Les groupes* $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ *et* $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, E, W)$ *engendrent* $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k})$.

Démonstration. Soit f un élément de $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k})$. Soit g_1 un élément de $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, E, W)$ qui coïncide avec f au voisinage des points N et S et posons $g_2 = g_1^{-1} \circ f$. On a alors $g_2 \in \mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ et $f = g_1 \circ g_2$. □

La contradiction cherchée est maintenant claire. Le groupe $\sigma\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k})$ tout entier fixe x_0 et sa différentielle en x_0 est triviale. Ceci est absurde puisque les éléments d'ordre fini distincts de l'identité (par exemple ceux de $\sigma(C_p)$) ne peuvent avoir une différentielle égale à l'identité en un point fixe. Ceci termine la preuve du théorème dans le cas où n est pair.

5. QUELQUES REMARQUES

Le résultat obtenu dans cette note suggère immédiatement une question plus générale. Si V est une variété à bord non vide ∂V, dans quelles