

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1991)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TOPOLOGIE DU COMPLÉMENTAIRE D'UN ENSEMBLE
ALGÈBRIQUE PROJECTIF
Autor: Chéniot, Denis
Kapitel: 6. Retour de l'éclaté à l'espace initial
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-58744>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

forme est donc donné par l'image de $H_k(M) \otimes \hat{H}_0(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$. Mais les éléments de ce supplémentaire sont eux-mêmes de la forme $z' \times \hat{\lambda}$ où $z' \in H_k(M)$ et où $\hat{\lambda}$ est la classe d'homologie du 0-simplexe singulier de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ d'image λ , classe sur laquelle $H_0(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ est libre. Si donc $\tilde{\lambda}$ est la classe d'homologie dans $H_0(\mathbf{P}_*^1)$ du même 0-simplexe, on a, par naturalité du produit-croix,

$$z' \times \hat{\lambda} = i'_k(z' \times \tilde{\lambda})$$

et η'_k s'annule donc dessus d'après l'exactitude de la ligne inférieure du diagramme (5.20.1). Cela montre la dernière assertion du corollaire 5.20. $\square$

Dans la suite, nous ne nous servons de ce qui a été fait dans ce paragraphe qu'à travers le corollaire 5.20 (excepté que, de manière indépendante de tout le reste, nous renverrons aux lemmes élémentaires 5.15 et 5.18 pour la démonstration du lemme élémentaire 7.7). On retrouve bien, dans ce corollaire, le deuxième point clef de la démonstration du théorème 1.3 dont nous avons parlé au moment de la présentation informelle de l'isomorphisme de Leray. En effet, d'après les démonstrations de la proposition 5.14 et du corollaire 5.20, la naturalité de l'isomorphisme de Leray par rapport à une sous-variété fermée transverse s'exprime dans la commutativité du diagramme (5.20.1) et la réduction à un produit-croix de l'isomorphisme de Leray dans le cas trivial est manifestée par les formules explicites (5.20.2) et (5.20.3).

6. RETOUR DE L'ÉCLATÉ À L'ESPACE INITIAL

Dans ce paragraphe, nous étudions d'un point de vue homologique la relation entre, d'une part, les éléments $\tilde{P}, \tilde{M}, L^\#, L_i^\#, M^\#, M_i^\#$ dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$ sur lesquels a porté notre étude aux paragraphes précédents et, d'autre part, les éléments P, L, L_i, M dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ sur lesquels porte le théorème 1.3 (cf. fig. 3.2). Nous nous étions en effet placés dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$ pour rendre compte de l'«isotopie» décrite informellement dans l'introduction et l'éclatement de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ le long de l'axe $\mathcal{M}$ du pinceau $\wedge$ avait été motivée par la nécessité de «répéter» cet axe. Toute l'étude géométrique qui précède a été faite dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$. Nous allons maintenant «redescendre» de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ à $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ au moyen du morphisme d'éclatement f . Comme nous ne nous intéressons qu'à ce qui se passe en dehors de A dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ et de sa transformée totale $\tilde{A}$ dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$, nous allons en fait étudier la géométrie de

(6.1) $f: \tilde{P} \rightarrow P$ application induite par le morphisme d'éclatement f
(cf. fig. 3.1 et 3.2).

Nous avons déjà vu en (3.29) que f donc f induisent les isomorphismes suivants:

$$(6.2) \quad \begin{cases} L^\# \xrightarrow{\sim} L \\ L_i^\# \xrightarrow{\sim} L_i & \text{pour } 1 \leq i \leq s \\ M^\# \xrightarrow{\sim} M \\ M_i^\# \xrightarrow{\sim} M & \text{pour } 1 \leq i \leq s. \end{cases}$$

Nous en avons en fait déjà tenu compte dans les propositions principales des §§ 4 et 5 en y faisant directement intervenir L, L_i et M à la place de $L^\#, L_i^\#$ et $M^\#, M_i^\#$.

Sur $\tilde{M} = M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, l'application f coïncide avec la *première projection*

$$(6.3) \quad f': \tilde{M} = M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow M$$

puisque, nous l'avons vu au § 3, le morphisme f coïncide avec la première projection sur $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. La formule de Künneth pour le produit $M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et la manière dont la projection f' agit en homologie sur les produits-croix (cf. [Sp] 5.3.12) donnent alors, pour tout k , la suite exacte courte scindée suivante

$$(6.4) \quad 0 \rightarrow H_{k-2}(M) \xrightarrow{\sigma'_k} H_k(\tilde{M}) \xrightarrow{f'_k} H_k(M) \rightarrow 0,$$

dans laquelle on a appliqué la convention d'écriture (2.1) à f' et où σ'_k est donné par

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \sigma'_k: H_{k-2}(M) &\rightarrow H_k(\tilde{M}) \\ z' &\mapsto z' \times w, \end{aligned}$$

w étant la classe fondamentale de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ compatible avec son orientation canonique, conformément à la définition (5.16); on convient que $H_{k-2}(M) = 0$ pour $k < 2$.

Il nous reste à voir comment se transforme $\tilde{P}$. Nous avons noté au § 3 que le morphisme f induit un isomorphisme analytique de $\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{\mathcal{M}}$ sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus \mathcal{M}$. L'application f réalise donc un isomorphisme de $\tilde{P} \setminus \tilde{M}$ sur $P \setminus M$. Nous venons de constater, d'autre part, qu'elle réduit $\tilde{M}$ en M suivant la première projection f' . Nous allons voir que, globalement, elle se comporte, en homologie, comme une simple juxtaposition de ces deux phénomènes.

Définissons, en effet, pour tout k , l'homomorphisme σ_k comme composé de σ'_k suivi de l'homomorphisme $H_k(\tilde{M}) \rightarrow H_k(\tilde{P})$ induit par inclusion, ce qu'on peut représenter par la commutation du diagramme

$$(6.6) \quad \begin{array}{ccc} & & H_k(\tilde{P}) \\ & \nearrow \sigma_k & \uparrow h_k \\ H_{k-2}(M) & \xrightarrow{\sigma'_k} & H_k(\tilde{M}) \end{array}$$

où h_k est, conformément à la convention (2.1), induit par l'inclusion h nommée en (5.19). Il est plus parlant d'écrire, en posant $w = [\Omega]$ comme en (5.17),

$$(6.7) \quad \sigma_k([\eta]) = [\eta \times \Omega] \tilde{P} \quad \text{pour tout } (k-2)\text{-cycle } \eta \text{ de } M,$$

avec un produit-croix homologique défini au niveau des cycles (cf. [Gb] (29.27)). On peut dire que σ_k fait correspondre à tout élément de $H_{k-2}(M)$ son «produit-croix plongé» par la classe fondamentale w de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

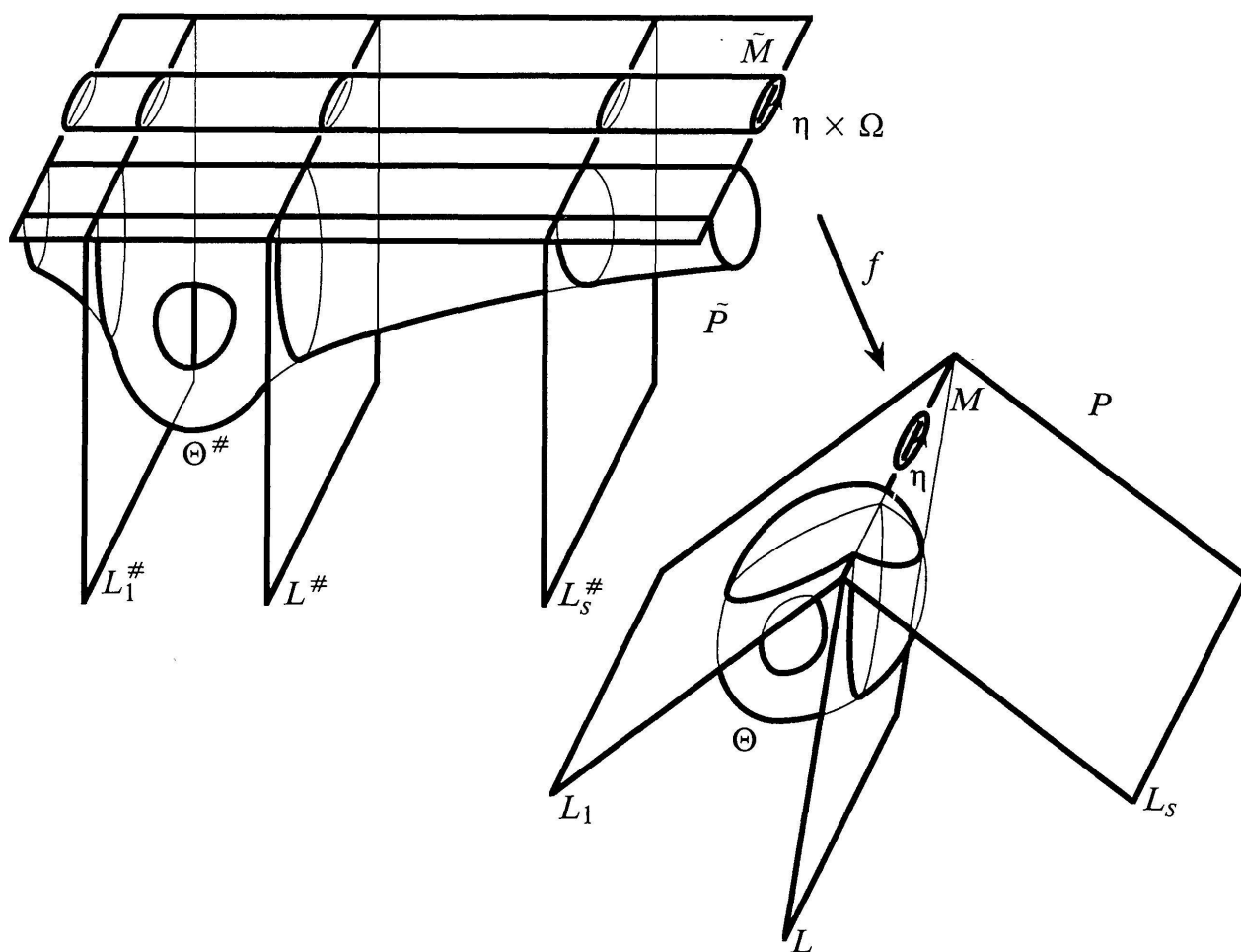


FIGURE 6.1

Le comportement dont nous avons parlé est alors décrit par la proposition suivante:

PROPOSITION 6.8. *Pour tout k , l'homomorphisme σ_k défini ci-dessus entre dans la suite exacte courte scindée suivante:*

$$0 \rightarrow H_{k-2}(M) \xrightarrow{\sigma_k} H_k(\tilde{P}) \xrightarrow{f_k} H_k(P) \rightarrow 0$$

où f_k est, suivant la convention (2.1), induit par l'application f définie en (6.1) comme restriction du morphisme d'éclatement. Nous convenons que $H_{k-2}(M) = 0$ pour $k < 2$.

Démonstration. Elle est faite dans [Ch2] proposition 4 qui d'ailleurs s'inspire de [A – F2] §4, theorem 2 et y renvoie pour partie. $\square$

La signification d'une partie du contenu de la proposition 6.8 peut être informellement décrite comme suit: Tout k -cycle de P est homologue à un cycle Θ qui est l'image par f d'un k -cycle $\Theta^\#$ de $\tilde{P}$ (cf. fig. 6.1) et les seuls k -cycles de $\tilde{P}$ qui soient «ratatinés» par f sont, à homologie près, les «transformées totales» $\eta \times \Omega$ de $(k-2)$ -cycles η de M , produits-croix de η par un 2-cycle fondamental Ω de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

Nous rassemblons, pour finir, le contenu de ce paragraphe dans le corollaire suivant qui est clair à partir de la suite exacte (6.4) et de la proposition 6.8:

COROLLAIRE 6.9. *On a, pour tout k , les deux suites exactes courtes scindées suivantes réunies par les homomorphismes naturels en un diagramme commutatif:*

$$(6.9.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_{k-2}(M) & \xrightarrow{\sigma_k} & H_k(\tilde{P}) & \xrightarrow{f_k} & H_k(P) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow \text{Id} & \subset & \uparrow h_k & \subset & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & H_{k-2}(M) & \xrightarrow{\sigma'_k} & H_k(\tilde{M}) & \xrightarrow{f'_k} & H_k(M) \rightarrow 0 \end{array}$$

Rappelons (cf. (6.5)) que l'homomorphisme σ'_k est donné par

$$(6.9.2) \quad \sigma'_k(z') = z' \times w \quad \text{pour} \quad z' \in H_{k-2}(M),$$

w étant la classe fondamentale de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ compatible avec son orientation canonique. Rappelons aussi (cf. (6.6)) que σ_k est alors précisément défini par la commutation du carré de gauche de ce diagramme et qu'une écriture plus parlante géométriquement en est donnée par (6.7). Rappelons enfin que nous utilisons la convention d'écriture (2.1) que nous avons appliquée à l'inclusion h nommée en (5.19) et aux applications f et f' introduites en (6.1) et (6.3) qui sont des restrictions convenables du morphisme d'éclatement, étant entendu que f' coïncide avec la première projection de $M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Nous convenons, comme d'habitude, que $H_{k-2}(M) = 0$ pour $k < 2$. $\square$