Introduction

L'Enseignement Mathématique, t. 37 (1991), p. 223-234

LE PROBLÈME FACILE DE WARING

par Philippe REVOY

SUMMARY. THE EASIER WARING PROBLEM. In the ill-named easier Waring problem, the knowledge of the function $v(k)$ is far from precise. Except the trivial majoration $G(k) + 1$, we only have rather large majorations for small k. In this note, I first give the classical facts and the particular cases $k = 4$ and $k = 5$ and I give certain new identities which arose in a paper of L. Vaserstein who gave a better bound for $v(8)$. We finish by a short description of the Tarry-Escott problem which is, for $k \geqslant 9$, the only way to get effective majorations of $v(k)$.

Dans le problème, nommé à tort facile de Waring, la connaissance de la fonction $v(k)$ reste encore imprécise: à l'exception de la majoration évidente par $G(k) + 1$, on ne dispose que de majorations assez larges pour les premières valeurs de l'exposant k. Dans cet article, après avoir repris les généralités classiques et les cas particuliers $k = 4$ et $k = 5$, je donne certaines identités nouvelles englobant en la simplifiant une identité due à Vaserstein qui a amélioré ainsi l'encadrement de $v(8)$ et je termine par des indications sur le problème de Tarry-Escott qui est pour $k \geqslant 9$ la seule source des autres majorations connues de $v(k)$.

INTRODUCTION

Soit $v(k)$ le plus petit entier s tel que tout entier est somme de s entiers de la forme $\pm z^k$, z entier. L'existence de $v(k)$ pour tout k s'établit facilement mais la détermination exacte de $v(k)$ — le problème «facile» de Waring — est délicate. Seuls $v(1) = 1$ et $v(2) = 3$ sont connus; pour les valeurs supérieures, on ne dispose que d'encadrement souvent larges. Ainsi $4 \leqslant v(3) \leqslant 5$, $9 \leqslant v(4) \leqslant 10$, $v(5) \in [5, 10]$, $v(6) \in [6, 14]$, $v(8) \in [17, 28]$, ... ([2], [8]).

L'existence de $v(k)$ découle de l'identité suivante:

$$(1) \qquad \sum_{h=0}^{h=k-1} (-1)^{k-1-h} C_{k-1}^{h} (x+h)^k = k!x + c_k$$

pour $k \geqslant 2, c_k \in \mathbf{Z}$. Tout entier n s'écrit $k!x + c_k + m$ où $|m| \leqslant \frac{1}{2}k!$, et m est somme d'au plus $\frac{1}{2}k!$ termes 1^k ou bien -1^k, d'où l'existence et la majoration grossière $v(k) \leqslant 2^{k-1} + \frac{1}{2}k!$, qui est une égalité pour $k = 2$.

L'existence de la constante asymptotique $G(k)$ du problème de Waring (tout grand nombre est somme d'au plus $G(k)$ puissances $k^{\text{ièmes}}$ d'entiers) donne: $v(k) \leqslant G(k) + 1$. Pour tout entier n, choisissant N très grand, $n + N^k$ sera somme d'au plus $G(k)$ puissances $k^{\text{ième}}$, d'où le résultat et la majoration $v(k) = O(k \operatorname{Log} k)$ d'après les résultats de Vinogradov ([1]), où les constantes sont effectives. Cette majoration reste médiocre pour les petites valeurs de k où nous avons des majorations plus précises.

1. La méthode générale suivie ([2], [3]) est en fait de travailler sur les deux côtés: améliorer l'identité (1) pour obtenir un nombre de termes inférieur à 2^{k-1} (possible si $k > 3$) et utiliser des congruences pour améliorer le terme $\frac{1}{2}k!$. Pour n et k des entiers fixés, on pose égal à $\Delta(k;n)$ le plus petit entier s tel que pour tout m la congruence $m \equiv \pm x_1^k \pm x_2^k \pm \ldots \pm x_s^k (n)$ a au moins une solution.

L'existence de $\Delta(k;n)$ est évidente, avec la majoration $\Delta(k;n) \leqslant v(k)$ puisque toute égalité donne une congruence quel que soit le module. Une fonction intéressante est $\Delta(k) = \sup_n \Delta(k;n)$ qui est inférieure ou égale à $v(k)$, seul moyen d'obtenir des minorations de $v(k)$. Le calcul de $\Delta(k;n)$ peut se faire en utilisant la décomposition en facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_h^{\alpha_h}$: on a alors $\Delta(k;n) = \sup_i \Delta(k;p_i^{\alpha_i})$. Si p_i ne divise pas k, $\Delta(k;p_i^{\alpha_i}) = \Delta(k;p_i) \leqslant k$ en utilisant le lemme de Hensel puis le théorème de Chevalley; si p divise k, la suite $i \mapsto \Delta(k;p^i)$ est stationnaire pour $i \geqslant i_0$ dépendant de l'entier $v_p(k)$, encore une fois d'après le lemme de Hensel. Les résultats les plus simples sont, par exemple

LEMME. $\Delta(3) = 4$, $\Delta(2^n) = 2^{n+1}$ *si* $n \geqslant 2$. *Si* $2k+1$ *est premier,* $\Delta(k; 2k+1) \geqslant k$.

La première affirmation provient de l'étude de x^3 modulo 9. Pour la seconde, il suffit de calculer $\pm x^{2^n}$ modulo 2^{n+2} ([8]). Pour la troisième, comme $p = 2k+1$ est premier $x^k \equiv \left(\frac{x}{p}\right) \bmod p$ où le second membre est $0, \pm 1$, le symbole de Legendre.

En ce qui concerne les identités, soit une égalité

$$\sum_{i=1}^{h} \pm P_i(x)^k = Ax + B \tag{2}$$

où $A \neq 0$ et où les P_i sont des polynômes à coefficients rationnels et à valeurs entières. On pose $v_*(k)$ le plus petit des entiers h tel qu'il existe une identité (2) avec h polynômes P_i: la finitude de $v_*(k)$ provient de (1) et on a $v_*(k) \leqslant 2^{k-1}$. L'essentiel des résultats obtenus provient de

PROPOSITION. $v(k) \leqslant v_*(k) + \Delta(k; A) \leqslant v_*(k) + \Delta(k)$.

C'est un décalque de la démonstration de l'introduction. Notons que le remplacement de $\Delta(k; A)$ par $\Delta(k)$ peut se traduire par une perte nette. Ainsi, si $k = 5$, l'une ou l'autre des deux identités suivantes

$$(x+3)^5 - 2(x+2)^5 + x^5 + (x-1)^5 - 2(x-3)^5 + (x-4)^5 = 720x - 360 \tag{3}$$

ou

$$(x+3)^5 + (x-3)^5 - (x+1)^5 - (x-1)^5 + 2(2x)^5 - (2x+1)^5 - (2x-1)^5 = 780x \tag{4}$$

qui donnent $v_*(5) \leqslant 8$ fournissent aussi, du fait de $\Delta(5; 720) = \Delta(5; 780) = 2$, la majoration $v(5) \leqslant 10 = 8 + 2$ alors que $\Delta(5) \geqslant \Delta(5; 11) = 5$. L'identité (3) est classique ([2]); l'identité (4) et d'autres seront données dans les paragraphes suivants. Pour le cas de l'exposant 3, le lecteur peut se reporter à [7] où l'essentiel des résultats connus est démontré avec des références bibliographiques.