

Proof of Theorem 3

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

We have, for $1 \leq i \leq N$ and $1 \leq j \leq N$,

$$(2.3) \quad x \equiv s_{i,j} q^j - d - 1(p^i q^j) \quad \text{where} \quad \begin{cases} s_{1,1} = 1 \\ 1 \leq s_{i,j} \leq p^i - 1, \end{cases}$$

whence

$$(2.4) \quad \begin{aligned} H(k, x) \geq & \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^N \frac{(1-p)}{p^i} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{p^i} \right) + \sum_{j=1}^N \frac{(1-q)}{q^j} \left(-\frac{1}{2} + \frac{d+1}{q^j} \right) \\ & + \frac{(p-1)(q-1)}{pq} \left(\frac{1}{2} - \frac{q-d-1}{pq} \right) \\ & + \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq N \\ (i,j) \neq (1,1)}} \frac{(p-1)(q-1)}{p^i q^j} \left(\frac{1}{2} - \frac{(p^i-1)q^j - d - 1}{p^i q^j} \right) + o_N(1). \end{aligned}$$

The right side of (2.4) tends to the right side of (2.1) as $N \rightarrow \infty$, and the theorem is proved in virtue of (0.15). $\square$

PROOF OF THEOREM 3

The function f_r defined in (0.11) satisfies, provided $r \geq 3$,

$$(3.1) \quad f_r(p_2, \dots, p_r) < f_{r-1}(p_2, \dots, p_{r-1}) \leq p_2,$$

and thus the condition

$$(3.2) \quad f_r(p_2, \dots, p_r) \geq x$$

implies, for any x , that

$$(3.3) \quad p_2 \begin{cases} > x & \text{if } r \geq 3, \\ \geq x & \text{if } r = 2. \end{cases}$$

Also note that, since

$$(3.4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_k(n)}{n} = \prod_{p|k} \left(1 + (1-p) \sum_{i \geq 1} \frac{1}{p^i} \right) = 0,$$

we have in fact

$$(3.5) \quad H(k, x) = - \sum_{n \geq 1} \frac{\gamma_k(n)}{n} \left\{ \frac{x}{n} \right\}.$$

After these preliminaries let $N \geq 1$ be as in (0.11), and define

$$(3.6) \quad x = x_N := p^N - 1,$$

where we denote p_1 simply by p . For $r \geq 3$ (3.2) and (3.3) imply that

$$(3.7) \quad p_2 > x,$$

and (3.7) clearly remains true for $r = 2$ if $p \neq 2$. Hence

$$\begin{aligned} H(k, x) &= (p-1) \left(\frac{p-1}{p^2} + \frac{p^2-1}{p^4} + \dots + \frac{p^{N-1}-1}{p^{2N-2}} \right) - (p^N-1) \sum_{n \geq N} \frac{\gamma_k(n)}{n^2} \\ &= - \frac{(p^N-1)(p^{N-1}-1)}{p^{N-1}(p+1)} - (p^N-1) \sum_{n \geq 2} \frac{\gamma_k(n)}{n^2} \\ (3.8) \quad &= (p^N-1) \left(\frac{(1-p^{N-1})}{(p+1)p^{N-1}} - \prod_{p|k} \left(1 + (1-p) \sum_{i \geq 1} \frac{1}{p^{2i}} \right) + 1 \right) \\ &= (p^N-1) \left(\frac{p^N+1}{(p+1)p^{N-1}} - \frac{k}{\sigma(k)} \right). \end{aligned}$$

Now when a rational number P/Q is less than an integer M , we may conclude that $M - P/Q \geq 1/Q$. Thus from (0.11) we have

$$(3.9) \quad \frac{p}{p+1} \cdot \frac{\sigma(k)}{k} = \frac{\sigma(k/p)}{k/p} \geq \frac{p^{N+1} - (\sigma(k/p) - k/p)^{-1}}{p^{N+1} - 1 - (\sigma(k/p) - k/p)^{-1}},$$

whence from (3.8)

$$(3.10) \quad H(k, x) \geq \frac{k}{\sigma(k)} + \frac{1}{(p+1)} \left(1 + \frac{1}{(\sigma(k/p) - k/p)p^{N+1} - 1} - \frac{1}{p^{N-1}} \right).$$

On appealing to Lemma 0 this concludes the proof of the theorem. $\square$

Last Remark. Neither of the estimates (2.1) (of Theorem 2') and (0.12) (of Theorem 3) is better than the other in all cases considered by both theorems. For instance in the case where $k = pq = p(p+d)$ with p and q odd primes and $2 \leq d \leq p-2$, there is some positive number ε depending on p , satisfying

$$(3.11) \quad \frac{13/4}{\sqrt{p}} < \varepsilon < \frac{8.06}{\sqrt{p}},$$

and such that (2.1) is better than (the first estimate of) (0.12) if $d < 2\sqrt{p} + 2 + \varepsilon$, and is not as good if $d > 2\sqrt{p} + 2 + \varepsilon$.

ADDED IN PROOF. Recently, S. D. Adhikari and K. Soundararajan gave a much simpler proof of (0.9) than mine in "Towards the exact nature of a certain error term, II" (preprint).

REFERENCES

- [A] ADHIKARI, S. D. Towards the exact nature of a certain error term. To appear in *Arch. Math.* 11.
- [AB] ADHIKARI, S. D. and R. BALASUBRAMANIAN. A note on a certain error term. *Arch. Math.* 56 (1991), 37-40.
- [ABS] ADHIKARI, S. D., R. BALASUBRAMANIAN and A. SANKARANARAYANAN. On an error term related to the greatest divisor of n , which is prime to k . *Indian J. Pure Appl. Math.* 19 (1988), 830-841.
- [HM] HERZOG, J. and T. MAXSEIN. On the behaviour of a certain error term. *Arch. Math.* 50 (1988), 145-155.
- [JV] JOSHI, V. S. and A. M. VAIDYA. Average behaviour of the largest k -prime divisor of an integer. *Coll. Math. Soc. János Bolyai 34; Topics in Classical Number Theory* (1981), 791-806.
- [P1] PÉTERMANN, Y.-F. S. Distribution of values of a real function. Means, moments, and symmetry. *Manuscripta Math.* 69 (1990), 305-318.
- [P2] ——— Oscillations d'un terme d'erreur lié à la fonction totient de Jordan. A paraître: *Sém. Théorie des Nombres de Bordeaux*.
- [Su] SURYANARAYANA, D. The greatest divisor of n which is prime to k . *Math. Stud.* 37 (1969), 145-157.
- [W] WINTNER, A. On the asymptotic distribution of the remainder term of the prime-number theorem. *Amer. J. Math.* 57 (1935), 534-538.

(Reçu le 11 décembre 1990)

Yves-F. S. Pétermann

Section de Mathématiques
 Université de Genève
 C.P. 240
 CH-1211 Genève 24 (Suisse)