

## §3. The four vertex theorem in $\mathbb{R}^2$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1990)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

§3. THE FOUR VERTEX THEOREM IN  $\mathbf{R}^2$ 

Let  $\gamma$  be a closed embedded curve on  $\mathbf{R}^2$ . The Euclidean curvature  $\kappa$  is defined and so it must have a minimum and a maximum which give two vertices on  $\gamma$ . (Indeed the number of local minima must be the same as the number of local maxima, so that the number of extrema is even.) Next we move  $\gamma$  by a Möbius transformation so as to send one of these extrema to  $\infty$ , and in such a way that the curve becomes asymptotic to the  $x$ -axis. Now  $\kappa(s) \rightarrow 0$  as  $s \rightarrow \pm \infty$ , and the theorem of turning tangents ([6], p. 37) says that  $\int \kappa(s) ds = 0$ . It follows that  $\kappa$  cannot have just one maximum or just one minimum for if so it would have a fixed sign and then the integral could not be zero. Thus  $\gamma$  has at least 2 extrema in addition to the one at infinity. But since the total number of extrema is even, there must be at least four of them, and hence four vertices.

There is a subtle point which we have glossed over in this argument. The vertices come in two types. As well as the extrema of  $\kappa$  (the “honest” vertices) there may also be non-extremal critical points of  $\kappa$ . The above “proof” has used the fact that not only are the vertices inversive invariants, but so too are the isolated extrema. Whereas this is indeed true (as is implied by equation 4.3 of the next section), it suffices to note that the non-extremal critical points of  $\kappa$  are unstable phenomena and each of them may be eliminated by a deformation of the curve with support in a small neighborhood of it. One may thus assume that all of the vertices of  $\gamma$  are extrema, whereupon the above proof stands as is.

*Remark 3.1.* The reader may compare the above proof to that of [10], where the four vertex theorem is obtained by using a Möbius transformation to send a *non-vertex* point to infinity.

§4. A GENERALIZATION OF THE INVARIANCE OF  $\omega$ 

Let  $(M, h)$  be a Riemannian surface with metric  $h$ , and let  $\gamma$  be a curve on  $M$  with geodesic curvature  $\kappa_g$ . We can ask whether the 1-form along a curve  $\gamma$  given by

$$\omega_\gamma = \sqrt{|\kappa'_g|} ds$$

is a conformal invariant. More precisely, let  $\Psi: (M_1, h_1) \rightarrow (M_2, h_2)$  be a conformal map and let  $\gamma_1$  be a curve on  $M_1$ ; is it true that

$$(4.1) \quad \Psi^*(\omega_{\Psi(\gamma_1)}) = \omega_{\gamma_1} .$$