5. Le théorème d'énumération de Pôlya

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

$$Z(G; z_1, z_2, ..., z_m) = \frac{1}{|G|} \Sigma z_1^{j_1} z_2^{j_2} ... z_m^{j_m}.$$

En l'absence d'une référence à un ensemble sur lequel G agit, on convient de considérer la représentation régulière du groupe G. Il faut remarquer que même dans ce cas, l'indicateur des cycles ne caractérise pas le groupe: prendre par exemple deux groupes non isomorphes d'ordre p^3 et d'exposant p premier impair [1, chapitre VIII].

L'indicateur des cycles pour le groupe des permutations de m objets Σ_m est connu sous forme implicite: c'est le coefficient de t^m dans le développement en série de la fonction $\exp\left(\Sigma(z_i t^i/i)\right)$. En particulier:

$$Z(\Sigma_3; z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{6}(z_1^3 + 3z_1 z_2 + 2z_3).$$

Dans de nombreux problèmes d'énumération (frises, colliers, etc.), c'est l'action du groupe cyclique C_m et du groupe diédral D_m sur les m sommets d'un polygone régulier qui intervient. Les indicateurs des cycles sont dans ces cas donnés par:

$$Z(C_m; z_1, z_2, ..., z_m) = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \varphi(d)\, z_d^{m/d}$$

$$Z(D_{2s}; z_1, z_2, ..., z_{2s}) = \frac{1}{4s} \sum_{d|2s} \varphi(d)\, z_d^{2s/d} + \frac{s}{2} z_1^2 z_2^{s-1} + \frac{s}{2} z_2^s$$

$$Z(D_{2s+1}: z_1, z_2, ..., z_{2s+1}) = \frac{1}{4s+2} \sum_{d|2s+1} \varphi(d)\, z_d^{(2s+1)/d} + s z_1 z_2^s$$

Le théorème de Burnside peut s'exprimer à l'aide de l'indicateur des cycles, puisque le nombre de points fixes d'un élément g est égal à j_1. Pour trouver le nombre d'orbites, il suffit en effet de calculer la dérivée partielle $\partial Z/\partial z_1$ au point $z_1 = z_2 = ... = z_m = 1$.

5. Le théorème d'énumération de Pòlya

Dans l'article [6] intitulé « Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen », Pòlya décrit une méthode de dénombrement pour les configurations inéquivalentes par l'action d'un groupe de symétries. Conçu au départ pour compter les isomères d'une substance chimique de géométrie donnée, le procédé permet également de donner des informations sur les symétries d'une molécule lorsque l'on en connaît le nombre de différents isomères.

La situation de départ est celle d'un groupe G agissant sur un ensemble à m éléments, qui eux-mêmes peuvent être coloriés à l'aide de n couleurs. On demande de déterminer le nombre de colorations de E, inéquivalentes par l'action du groupe G. La solution donnée par Pòlya s'obtient en appliquant convenablement le théorème de Burnside:

THÉORÈME 5.1. *Le nombre de colorations de l'ensemble* E *à* n *couleurs, inéquivalentes par l'action de* G, *est* $Z(G; n, n, ..., n)$.

Démonstration. En agissant sur E, le groupe G agit également sur l'ensemble des colorations de E à n couleurs, et c'est le nombre d'orbites de cette action qu'il faut déterminer. Par le théorème de Burnside, on est ramené à compter les colorations de E qui sont fixes par un élément donné g de G. Mais une coloration n'est invariante par g que si elle est constante sur les cycles de g. Il y a donc $n^{j_1+j_2+\dots+j_m}$ colorations fixes par g, et par conséquent $Z(G; n, n, ..., n)$ orbites. C.Q.F.D.

L'application la plus connue est celle du comptage des colliers différents pouvant être formés avec des perles de deux couleurs. La suite des premières valeurs obtenues, en fonction du nombre total de perles, est 2, 3, 4, 6, 8, 13, 18, 30, 46, 78, 126, 224 ... Elle sert souvent d'exemple résistant au traitement par les différences finies.

Une version plus générale, dans laquelle un deuxième groupe agit sur l'ensemble des couleurs, a été donnée par de Bruijn [2]. On en trouve une application intéressante dans [5]: le comptage des différents thèmes dodécaphoniques cycliques, inéquivalents par transposition musicale.

6. CLASSIFICATION DES COLORATIONS

Si le groupe G est trivial, il est bien connu que les n^m colorations de l'ensemble E à l'aide de n couleurs peuvent être triées selon les couleurs utilisées. Il suffit de développer $(x_1+x_2+\dots+x_n)^m$, puisque le coefficient multinomial $(m; i_1, i_2, ..., i_n)$ est le nombre de colorations nécessitant i_1 fois la couleur x_1, i_2 fois la couleur $x_2, ...,$ et i_n fois la couleur x_n. On dira que de telles colorations ont le poids $(i_1, i_2, ..., i_n)$.

Dans le cas général, on peut appliquer un raisonnement analogue à chaque terme de la formule de Burnside. On doit alors tenir compte du fait que les colorations sont constantes sur les cycles des éléments du groupe G.