2. DÉMONSTRATION DU THEOREME DE BURNSIDE

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

L'Enseignement Mathématique, t. 35 (1989), p. 99-106

LE THÉORÈME DE BURNSIDE SUR LE COMPTAGE DES ORBITES ET QUELQUES APPLICATIONS

par François SIGRIST

1. INTRODUCTION

Le nombre d'orbites de l'action d'un groupe fini sur un ensemble fini est donné par la moyenne du nombre de points fixes, calculée sur le groupe. Dans le cas d'une action transitive, ce résultat est dû à Frobenius [3, p. 287]. Le cas général, assorti d'un perfectionnement intéressant, se trouve dans le livre de Burnside [1, chapitre X, théorème VII, p. 191]:

> "The sum of the numbers of symbols left unchanged by each of the permutations of a permutation group of order N is tN, where t is the number of transitive sets in which the group permutes the symbols. The sum of the squares of the numbers of symbols left unchanged by each of the permutations of a transitive group of order N is sN, where s is the number of transitive sets in which a subgroup leaving one symbol unchanged permutes the symbols."

L'application la plus connue de ce résultat se trouve dans un article de Pòlya paru en 1937 [6]. Je présenterai ci-après les principaux aspects de cette « Pòlya's theory of counting », une méthode très efficace de dénombrement. Mais au préalable, je montrerai comment le théorème de Galois sur les équations de degré premier peut servir d'illustration au théorème de Burnside. Je donnerai les démonstrations complètes pour les deux théorèmes, car on ne les trouve pas souvent dans les ouvrages d'enseignement ou dans les cours. Pour ne pas alourdir inutilement les énoncés, je supposerai toujours que l'action d'un groupe est *effective*, et donc que seule l'identité agit trivialement.

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE BURNSIDE

Le groupe G, d'ordre N, agit sur l'ensemble E, à m éléments. On note o_i la cardinalité des orbites $O_i (i=1\,.\,.\,t)$. G_x est le stabilisateur de $x \in E$, n_i est l'ordre de G_x pour $x \in O_i$, $\mathrm{Fix}(g)$ est l'ensemble des points fixes de $g \in G$, et a_i est le nombre d'éléments de G ayant exactement i points fixes.

PROPOSITION 2.1. $\Sigma \mid \mathrm{Fix}(g) \mid = tN$, *ou, de façon équivalente,* $\Sigma i a_i = t \Sigma a_i$.

Démonstration. Considérons l'ensemble P des paires (g, x) telles que $gx = x$. P contient d'une part $\Sigma \mid \mathrm{Fix}(g) \mid$, et d'autre part $\Sigma \mid G_x \mid = \Sigma o_i n_i = tN$ paires, d'où l'assertion.

Pour la deuxième partie de l'énoncé de Burnside, on suppose que G agit transitivement, et que s est le nombre (commun) d'orbites des stabilisateurs.

PROPOSITION 2.2. $\Sigma i^2 a_i = s \Sigma a_i$.

Démonstration. Choisissons un stabilisateur G', et notons a_i' le nombre d'éléments de G' ayant exactement i points fixes. Alors $m a_i' = i a_i$, car un élément de G avec i points fixes appartient à i stabilisateurs. La proposition 2.1, appliquée à G', donne $\Sigma i a_i' = s \mid G' \mid = sN/m$, d'où $\Sigma i^2 a_i = sN$, comme annoncé.

On dira que le groupe G agit de façon *affine* si tout élément de G ayant deux points fixes est l'identité. Avec cette définition, la proposition 2.1 permet d'énoncer:

PROPOSITION 2.3. *On suppose que G agit transitivement sur un ensemble E à m éléments. Alors l'action de G est affine si et seulement si G contient exactement $m - 1$ éléments sans point fixe.*

Démonstration. Avec les notations ci-dessus, l'action est affine si et seulement si $a_2 = a_3 = \ldots = a_{m-1} = 0$. Comme $a_m = 1$, la proposition 2.1 pour $t = 0$ devient $a_0 = a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \ldots + (m-2)a_{m-1} + m - 1$.

C.Q.F.D

3. UN THÉORÈME DE GALOIS

« Le Mémoire ci-joint est extrait d'un ouvrage que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie il y a un an. Cet ouvrage n'ayant pas été compris, les propositions qu'il renferme ayant été révoquées en doute, j'ai dû me contenter de donner, sous forme synthétique, les principes généraux et une seule application de ma théorie. Je supplie mes juges de lire du moins avec attention ce peu de pages. On trouvera ici une CONDITION générale à laquelle SATISFAIT TOUTE ÉQUATION SOLUBLE PAR RADICAUX, et qui réciproquement assure leur résolubilité. On en fait l'application seulement aux équations dont le degré est un nombre premier. Voici le théorème donné par notre Analyse:

Pour qu'une équation de degré premier, qui n'a pas de diviseurs commensurables, soit soluble par radicaux, il FAUT et il SUFFIT que toutes les racines soient des fonctions rationnelles de deux quelconques d'entre elles... »

[4, Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux, extrait de la préface du 16 janvier 1831].