

REPRESENTATION OF EVERY RATIONAL NUMBER AS AN ALGEBRAIC SUM OF FIFTH POWERS OF RATIONAL NUMBERS

Autor(en): **Choudhry, Ajai**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-57359>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

REPRESENTATION
OF EVERY RATIONAL NUMBER AS AN ALGEBRAIC SUM
OF FIFTH POWERS OF RATIONAL NUMBERS

by Ajai CHOUDHRY

The representation of a rational number as an algebraic sum of k^{th} powers of rational numbers has been considered by Subba Rao [1]. Let $g_1(k)$ be defined as the least integer s such that every rational number r can be expressed in the form

$$(1) \quad r = a_1x_1^k + a_2x_2^k + \dots + a_sx_s^k$$

where $a_i = \pm 1$ and all of the values of x_i are rational. It has been shown [1] that

$$g_1(5) \leq 8.$$

In this note we shall prove that $g_1(5) \leq 6$. We shall also obtain a parametric solution of the Diophantine equation

$$(2) \quad x_1^5 + x_2^5 + \dots + x_s^5 = 0 \quad \text{for} \quad s \geq 6.$$

The result follows from the identity

$$(3) \quad \begin{aligned} & (t^6x - t^{15} - t^5 - 1)^5 + (t^3x + t^2)^5 + (x - t^{14})^5 \\ & - (t^6x - t^{15} - t^5 + 1)^5 - (t^3x - 2t^{12} - t^2)^5 - (x + t^{14})^5 \\ & = -2(t^{40} + t^{30} - t^{10} - 1)(20t^{11}x + t^{30} - 12t^{20} - 8t^{10} - 1). \end{aligned}$$

As the expression on the right-hand side of (3) is linear in x , it can be equated to any rational number r , and solved for x , which leads to the result

$$g_1(5) \leq 6.$$

Thus, every rational number can be expressed as the algebraic sum of at most six fifth powers of rational numbers, and since in the above discussion, t can be taken as any rational number except that $t \neq 0, \pm 1$, this can be done in infinitely many ways.

To solve (2) for $s = 6$, we equate the right-hand side of (3) to 0, and obtain the result

$$\begin{aligned} & (t^{36} + 8t^{26} + 12t^{16} + 20t^{11} - t^6)^5 + (t^{33} - 12t^{23} - 28t^{13} - t^3)^5 \\ & + (t^{30} + 20t^{25} - 12t^{20} - 8t^{10} - 1)^5 - (t^{36} + 8t^{26} + 12t^{16} - 20t^{11} - t^6)^5 \\ & - (t^{33} + 28t^{23} + 12t^{13} - t^3)^5 - (t^{30} - 20t^{25} - 12t^{20} - 8t^{10} - 1)^5 = 0. \end{aligned}$$

This result has earlier been given by Moessner [2].

To solve (2) for $s = 6 + m$, $m > 0$, we simply equate the right hand side of (3) to $\sum_{i=1}^m x_i^5$ where x_i are any rational numbers, and solve for x , which leads to a solution of (2) for $s > 6$. Solutions in integers can be obtained by multiplying by a suitable constant.

REFERENCES

- [1] SUBBA RAO, K. Representation of Every Number as a Sum of Rational k^{th} Powers. *Journal London Math. Soc.* 13 (1938), 14-16.
 [2] MOESSNER, A. Due Sistemi Diofantei. *Boll. Un. Mat. Ital. Ser. 3*, 6 (1951), 117-118.

(Reçu le 29 janvier 1988)

Ajai Choudhry

Embassy of India
 Rejtana 15
 Warsaw (Poland)