

8. Cauchy's residue theorem

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

In order to calculate $\text{Ind}(\gamma; s)$ we replace U by a small pointed neighbourhood D^* of s . With the notation of (7.2) let us write $\rho = \rho(s)\rho_s$ and deduce that

$$\langle \partial\gamma, \omega \rangle = \rho(s)\text{Tr}(\omega; s), \quad \omega \in \Gamma(D^*, \Omega^{n-1}), \quad d\omega = 0.$$

We can now conclude from (7.6) that

$$\text{Ind}(\gamma; s) = \rho(s), \quad s \in X - U.$$

This reveals that $s \mapsto \text{Ind}(\gamma; s)$ is a compactly supported, locally constant function on $X - U$.

For a given fixed point $s \notin \text{Supp}(b\gamma)$ choose U to be an open neighbourhood of $\text{Supp}(b\gamma)$ with \bar{U} compact and $s \notin U$. We can apply the considerations above and conclude that the winding number is constant in a neighbourhood of s and zero outside some compact neighbourhood of $\text{Supp}(b\gamma)$. Q.E.D.

(7.11) COROLLARY. *Let γ be a compact n -chain on the oriented smooth manifold X and U an open subset of X containing $\text{Supp}(b\gamma)$. The relative de Rham homology class*

$$[\gamma] \in H_n^c(X, U; \mathbf{C})$$

is zero if and only if $\text{Ind}(\gamma; s) = 0$ for all $s \in X - U$.

Proof. This is a corollary to the proof of (7.10) rather than the statement (7.10). Anyway, the basic point is Poincaré duality (6.6). Q.E.D.

8. CAUCHY'S RESIDUE THEOREM

We shall consider a smooth map $\gamma: S^{n-1} \rightarrow E$ from the oriented $n - 1$ sphere into an oriented n -dimensional real vector space E . For a point s outside $\gamma(S^{n-1})$ pick a closed $(n - 1)$ -form ω_s on $E - \{s\}$ with $\text{Tr}(\omega_s; s) = 1$ and define the *winding number* of γ with respect to s to be

$$(8.1) \quad \text{Ind}(\gamma; s) = \int_{S^{n-1}} \gamma^* \omega_s.$$

(8.2) CAUCHY'S RESIDUE THEOREM. *Let $\gamma: S^{n-1} \rightarrow X$ denote a smooth map into an open subset X of E with $\text{Ind}(\gamma; z) = 0$ for all $z \in E - X$.*

For a closed and discrete subset S of X disjoint from $\gamma(S^{n-1})$ only finitely many of the numbers $\text{Ind}(\gamma; s), s \in S$, are distinct from zero and

$$\int_{S^{n-1}} \gamma^* \omega = \sum_{s \in S} \text{Ind}(\gamma; s) \text{Tr}(\omega; s)$$

for any closed form ω on $X - S$.

Proof. The long exact de Rham homology sequence for the pair $X - S, E$ degenerates into an isomorphism

$$b: H_n^c(E, X - S; \mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}^c(X - S, \mathbf{C}).$$

Let us view γ as a homology class on $X - S$ and introduce the class

$$b^{-1}\gamma \in H_n^c(E, X - S; \mathbf{C}).$$

Let us notice that the winding number (8.1) and (7.8) agree. Thus we conclude from (7.11) that $b^{-1}\gamma$ maps to zero in $H_n^c(E, X; \mathbf{C})$ and consequently that γ is homologous to zero on X . The exact sequence

$$0 \rightarrow H_n^c(X, X - S; \mathbf{C}) \xrightarrow{b} H_{n-1}^c(X - S, \mathbf{C}) \rightarrow H_{n-1}^c(X, \mathbf{C})$$

allows us to interpret γ as a relative class

$$\gamma \in H_n^c(X, X - S; \mathbf{C}).$$

The class γ can be specified by the formula

$$\langle b\gamma, \omega \rangle = \int_{S^{n-1}} \gamma^* \omega, \quad \omega \in \Gamma(X - S, \Omega^{n-1}), \quad d\omega = 0.$$

From the decomposition (4.9) and excision (4.6) we deduce a canonical isomorphism

$$H_n(X, X - S; \mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{s \in S} H_n(X, X - \{s\}; \mathbf{C})$$

which allow us to decompose the class γ into a finite sum, compare (7.6),

$$\gamma = \sum_{s \in S} \text{Ind}(\gamma; s) \theta_s.$$

Using the general Stokes formula (5.3) we get that

$$\langle b\gamma, \omega \rangle = \langle \gamma, \partial\omega \rangle = \sum \text{Ind}(\gamma; s) \langle \theta_s, \partial\omega \rangle$$

and the result follows from formula (7.6).

Q.E.D.