

Appendix : Construction of the Smoothing Operators in Sobolev Spaces

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

If $\phi \in H^\infty(\Omega)$ is valued in $\mathbf{R}^{n(n+1)/2}$, let us consider it as a function valued in $\mathbf{R}^{n(n+3)/2}$ by adding n components $\phi_j = 0$ for $1 \leq j \leq n$, and define $\psi(u)\phi$ as a continuous extension to \mathbf{R}^n of the function

$$(16) \quad v = -\frac{1}{2} A(u)^{-1} \phi$$

where $A(u)$ is the $n(n+3)/2$ square matrix the rows of which are $\partial_j u$ for $1 \leq j \leq n$ and $\partial_j \partial_k u$ for $1 \leq j \leq k \leq n$; thanks to our choice of u_0 , the matrix $A(u_0)$ is invertible on Ω , and so is $A(u)$ for any u close enough to u_0 . Since $A(u)^{-1}$ is an algebraic function of derivatives of u up to order 2, estimates such as (3) are again classical.

Finally, we have to prove that this operator ψ inverts ϕ' (formula (2)). Applying $A(u)$ to the function v in (16), one gets

$$\begin{aligned} \langle \partial_j u, v \rangle &= -\frac{1}{2} \phi_j = 0 & 1 \leq j \leq n \\ \langle \partial_j \partial_k u, v \rangle &= -\frac{1}{2} \phi_{jk} & 1 \leq j \leq k \leq n. \end{aligned}$$

The x_k derivative of the first equation gives $\langle \partial_j \partial_k u, v \rangle + \langle \partial_j u, \partial_k v \rangle = 0$, and one gets also $\langle \partial_j \partial_k u, v \rangle + \langle \partial_k u, \partial_j v \rangle = 0$ so that the second equation and (15) give $\phi'(u)v = \phi$ in Ω .

Thus all the assumptions of the theorem are fulfilled, and it follows that we can get a solution if $\phi(u_0)$ is sufficiently small in some $H^s(\Omega)$ norm; but according to (14), $\phi(u_0) = g^0 - g$, and the result is that (13) can be solved for any metric g close enough to g^0 , as required.

APPENDIX:

CONSTRUCTION OF THE SMOOTHING OPERATORS IN SOBOLEV SPACES

Let us recall that $v \in H^s(\mathbf{R}^n)$ means $v \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ and

$$|v|_s^2 = (2\pi)^{-n} \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Let $\chi: \mathbf{R}^n \rightarrow [0, 1]$ be a C^∞ function taking the value 1 in a neighborhood of 0 and vanishing for $|\xi| \geq \sqrt{3}$. For $v \in H^\infty(\mathbf{R}^n)$ and $\theta > 1$ one sets

$$\widehat{S_\theta v}(\xi) = \chi(\xi/\theta) \hat{v}(\xi).$$

Then, if $s \geq t$,

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{S_\theta v}(\xi)|^2 &\leq \theta^{2(s-t)} (1 + |\xi/\theta|^2)^{s-t} |\chi(\xi/\theta)|^2 (1 + |\xi|^2)^t |\hat{v}(\xi)|^2 \\ &\leq (2\theta)^{2(s-t)} (1 + |\xi|^2)^t |\hat{v}(\xi)|^2 \end{aligned}$$

since $|\chi| \leq 1$ and $|\xi/\theta| \leq \sqrt{3}$ for $(\xi/\theta) \in \text{supp } \chi$; this gives the first estimate (4) with $C_{s,t} = 2^{s-t}$.

Similarly, for $s \leq t$,

$$(1 + |\xi|^2)^s |\hat{v}(\xi) - \widehat{S_\theta v}(\xi)|^2 = |1 - \chi(\xi/\theta)|^2 (1 + |\xi|^2)^s |\hat{v}(\xi)|^2;$$

a Taylor formula gives $|1 - \chi(\xi/\theta)| \leq C_k |\xi/\theta|^k$ with $C_k = \sup |\chi^{(k)}|/k!$ for any $k \in \mathbb{N}$ since $\chi(0) = 1$ and $\chi^{(j)}(0) = 0$ for $j > 0$, so that for $t = s + k$

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{v}(\xi) - \widehat{S_\theta v}(\xi)|^2 &\leq C_{t-s}^2 |\xi/\theta|^{2(t-s)} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{v}(\xi)|^2 \\ &\leq C_{t-s}^2 \theta^{2(s-t)} (1 + |\xi|^2)^t |\hat{v}(\xi)|^2 \end{aligned}$$

whence the second estimate (4) with $C_{s,t} = C_{t-s} = \sup |\chi^{(t-s)}|/(t-s)!$

REFERENCES

- [1] HAMILTON, R. The inverse function theorem of Nash-Moser. *Bulletin of the A.M.S.* 7 (1982), 65-222.
- [2] HÖRMANDER, L. The boundary problems of physical geodesy. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 62 (1976), 1-52.
- [3] ——— *Implicit function theorems*. Lectures at Stanford University, Summer Quarter 1977.
- [4] ——— On the Nash-Moser implicit function theorem. *Annales Acad. Sci. Fenniae, Series A.I. Math.* 10 (1985), 255-259.
- [5] MOSER, J. A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 47 (1961), 1824-1831.
- [6] ——— A rapidly convergent iteration method and nonlinear partial differential equations I and II. *Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa* 20 (1966), 265-315 and 499-533.
- [7] NASH, J. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Ann. of Math.* 63 (1956), 20-63.
- [8] SCHWARTZ, J. T. *Nonlinear functional analysis, Chap. II.A*. Gordon & Breach, New York 1969.
- [9] SERGERAERT, F. Une généralisation du théorème des fonctions implicites de Nash. *C. R. Acad. Sci. Paris, 270A* (1970), 861-863.
- [10] ——— Un théorème des fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris 4^e série*, 5 (1972), 599-660.
- [11] ZEHNDER, E. Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems I and II. *Comm. in Pure and Appl. Math.* 28 (1975), 91-140; 29 (1976), 49-111.

(Reçu le 14 juin 1989)

Xavier Saint Raymond

Purdue University and C.N.R.S.