

# Appendix: an improvement of the inequality of Theorem 1

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1987)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

It is clear that these two arcs of  $\tilde{a}$  pass  $2i - 1$  times from right to left under  $a$ . Thus the contribution of the neighbourhood  $\mathcal{U}$  to  $Q(\alpha, \alpha)$  is given by

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = -n + 2 \sum_{i=1}^n i = n^2.$$

This shows that  $Q(\alpha, \alpha) > 0$  if  $a$  crosses at least one band of  $V$ . If not, then  $\alpha = 0$ .

Thus  $Q$  is positive definite. This completes the proof of Theorem 2.

#### APPENDIX: AN IMPROVEMENT OF THE INEQUALITY OF THEOREM 1

Though the inequality

$$(10) \quad c(K) + r(K) - 1 \geq \text{span}(L)$$

of Theorem 1 becomes an equality for weakly alternating diagrams, it may be sharpened a little for other cases. Let  $K$  be a link diagram in  $R^2$  and let  $\Gamma \subset R^2$  be the associated link projection. For  $P \in S^2 - \Gamma$  (where  $S^2 = R^2 \cup \{\infty\}$ ), let  $i(P)$  be the intersection number modulo 2 of  $\Gamma$  with a generic 1-chain connecting  $P$  to  $\infty$ . Shade the regions of  $S^2 - \Gamma$  for which  $i \equiv 1 \pmod{2}$ , so that  $S^2$  is painted like a chessboard. Let  $b_1, \dots, b_m$  be the shaded regions of  $S^2 - \Gamma$  and let  $w_1, \dots, w_n$  be the unshaded regions of  $S^2 - \Gamma$ .

An edge  $e$  of  $\Gamma$  is called *K-good* either if  $e$  is a loop or if one of the end points of  $e$  corresponds to an overcrossing point of  $K$  and the other end point of  $e$  corresponds to an undercrossing point of  $K$ . An edge of  $\Gamma$  which is not *K-good* is called *K-bad*. For any  $i \in \{1, \dots, m\}$  and for any  $j \in \{1, \dots, n\}$ , it is clear that the set  $\overline{b_i} \cap \overline{w_j}$  consists of several edges and double points of  $\Gamma$ . Denote by  $a(i, j)$  the number modulo 2 of *K-bad* edges in  $\overline{b_i} \cap \overline{w_j}$ . Denote by  $u(K)$  the rank of the  $m \times n$  matrix  $(a(i, j))$ .

**THEOREM.** *If  $K$  is a diagram of a link  $L$ , then*

$$(11) \quad c(K) + r(K) - 1 \geq \text{span}(L) + u(K).$$

**COROLLARY.** *If  $K$  is a diagram of an unsplittable link  $L$ , then*

$$c(K) \geq \text{span}(L) + u(K).$$

Of course, if  $K$  is a weakly alternating diagram, then  $u(K) = 0$ .

The inequalities of the Theorem and of the Corollary may be strict. For example, if we take the diagram  $K = 8_{19}$  in Rolfsen's book, then  $\text{span}(8_{19}) = 5$  and  $u(K) = 2$ , so that the inequality (11) amounts to  $8 > 7$ . Unfortunately, even in the case where (11) is an equality, it does not mean that  $K$  is a minimal diagram of  $L$ , since  $u(K)$  depends on  $K$  and is not an invariant of  $L$ .

The proof of the Theorem goes along the same lines as the proof of Theorem 1 of § 1. Indeed the proof of Lemma 1 of § 2 shows in fact that  $|S| + |\check{S}| \leq c + 2r - R$ , where  $R$  is the rank of the intersection form (5). For the state  $A$ , it is easy to show that  $R = 2u(K)$ , and this gives the desired result.

#### REFERENCES

- [1] CROWELL, R. H. Nonalternating links. *Ill. J. Math.* 3 (1959), 101-120.
- [2] GORDON, C. McA and R. A. LITHERLAND. On the signature of a link. *Invent. math.* 47 (1978), 53-69.
- [3] DE LA HARPE, P., M. KERVAIRE and C. WEBER. On the Jones polynomial. *L'Enseignement math.* 32 (1986), 271-335.
- [4] JONES, V. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.* 12 (1985), 103-111.
- [5] KAUFFMAN, L. State models and the Jones polynomial. Preprint, 1986.
- [6] MURASUGI, K. Jones polynomials and classical conjectures in knot theory. *Topology* 26 (1987), 187-194.
- [7] ROLFSEN, D. *Knots and links*. Publish or Perish 1976.
- [8] TAIT, P. G. On Knots I, II, III. *Scientific papers, Vol. 1* (1898), 273-347.
- [9] THISTLETHWAITE, M. B. Kauffman's polynomial and alternating links. Preprint, 1986.

(Reçu le 7 avril 1987)

V. G. Turaev

Steklov Inst. of Math.  
Fontanka 27  
Leningrad (191011)  
USSR