

§3. The group of quaternion units

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1987)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

since

$$(1-a)(1-b) = (1-b)(1-a) \pmod{M^3}.$$

We know that $(1-a)^2, (1-b)^2, (1-a)(1-b)$ forms a K -basis of M^2/M^3 . Hence $u \cdot v \neq 0$ and $v \cdot u \neq 0 \pmod{M^3}$. Otherwise

$$x_1x_2 = y_1y_2 = x_1y_2 + x_2y_1 = 0$$

and $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ contrary to the fact that $\{u, v\}$ gives a basis of M/M^2 .

Thus $uv, vu \in B$ satisfy $uv = vu \pmod{M^3}$ and $uv \neq 0, vu \neq 0 \pmod{M^3}$.

It follows that $uv = vu$. In fact more generally, if $u_1, u_2 \in B \setminus M^k$ and $u_1 = u_2 \pmod{M^k}$ then $u_1 = u_2$. Proof: $B \cap M^k$ is a basis of M^k , thus $u_1 - u_2 = \sum_{u \in B \cap M^k} \lambda_u u$. This is possible only if $u_1 - u_2 = 0$.

§ 3. THE GROUP OF QUATERNION UNITS

Let Q be defined by generators and relations:

$$Q = \langle a, b : a^4 = 1, b^2 = a^2, ab = b^3a \rangle.$$

Set $i = a, j = b, k = ab$ and $c = a^2$. Then

$$Q = \{1, c, i, ci, j, cj, k, ck\}.$$

PROPOSITION 2. *Let K be a field of characteristic 2. The group algebra $K[Q]$ possesses a filtered multiplicative basis if and only if K contains a primitive cube root of unity.*

Proof. If K contains a primitive cube root of unity, say ω ,
let

$$B = \{1, u, v, uv, vu, u^2, v^2, u^3\},$$

where

$$\begin{aligned} u &= \omega i + \omega^2 j + k \\ v &= \omega^2 i + \omega j + k. \end{aligned}$$

It is easily verified that B is a filtered multiplicative basis.

Conversely, suppose that $K[Q]$ possesses a filtered multiplicative basis B .

Observe that $\{1+i, 1+j\}$ is a K -basis of M/M^2 , where again $M = \text{rad } K[Q]$. Also $\{1+c, 1+i+j+k\}$ is a K -basis of M^2/M^3 . Since $B \cap (M/M^2) = \{u, v\}$ must be a K -basis of $M \text{ mod } M^2$, we have

$$u = x_1(1+i) + y_1(1+j) \text{ mod } M^2,$$

$$v = x_2(1+i) + y_2(1+j) \text{ mod } M^2,$$

with $x_1, y_1, x_2, y_2 \in K$ and $x_1y_2 + x_2y_1 \neq 0$.

Now

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (x_1x_2 + y_1y_2 + x_2y_1)(1+c) \\ &\quad + (x_1y_2 + x_2y_1)(1+i+j+k) \text{ mod } M^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v \cdot u &= (x_1x_2 + y_1y_2 + x_1y_2)(1+c) \\ &\quad + (x_1y_2 + x_2y_1)(1+i+j+k) \text{ mod } M^3. \end{aligned}$$

Therefore,

$$u \cdot v + v \cdot u = (x_1y_2 + x_2y_1)(1+c) \text{ mod } M^3 \neq 0 \text{ mod } M^3,$$

and so $u \cdot v \neq v \cdot u$.

We must have $uv \in B \cap (M^2 \setminus M^3)$ since the $(1+i+j+k)$ -coordinate of $u \cdot v$ is non-zero. Similarly $v \cdot u \in B \cap (M^2 \setminus M^3)$. But $\dim(M^2/M^3) = 2$ and so

$$B \cap (M^2 \setminus M^3) = \{uv, vu\}.$$

Consider the element $u^2 \in M^2$. Either $u^2 = uv$ or $u^2 = vu$ or $u^2 \in M^3$. But $u^2 = (x_1^2 + y_1^2 + x_1y_1)(1+c) \text{ mod } M^3$.

Since the $(1+i+j+k)$ -coordinate of u^2 is 0, we have $u^2 \neq uv$, $u^2 \neq vu$.

Hence $u^2 \in M^3$. This implies $u^2 = 0$, and it follows that the quadratic form $x_1^2 + y_1^2 + x_1y_1$ represents 0 non-trivially in K and $w = y_1/x_1$ is a primitive cube root of unity in K .