§2. Représentation de Gelfand-Graev de G ET DÉCOMPOSITION DE SON ALGÈBRE D'ENTRELACEMENT A SUIVANT LES CARACTÈRES CENTRAUX DE G

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

§ 2. Représentation de Gelfand-Graev de G et décomposition de son algèbre d'entrelacement A suivant les caractères centraux de G

Nous gardons les notations de l'introduction, F désigne le corps fini à q éléments, $F^{\times}$(resp. F^{+}) désigne le groupe multiplicatif (resp. additif) de F et $G = GL(2, F)$. Nous fixons, une fois pour toutes, un caractère non-trivial ψ de F^{+}. La représentation de Gelfand-Graev V de G est définie par

$$V = \operatorname{Ind}_U^G(\lambda),$$

où $U = \{u(b) \mid b \in F^{+}\}$, $u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour $b \in F$, et $\lambda(u(b)) = \psi(b)$, pour tout $b \in F$. Nous allons étudier la structure de l'algèbre d'entrelacement $A = \operatorname{End}_G(V)$. A ce propos, il est commode de travailler avec des idempotents dans l'algèbre $\mathbf{C}[G]$ du groupe G.

Posons $e_\lambda := q^{-1} \sum_{u \in U} \lambda(u^{-1})u$. On a $e_\lambda^2 = e_\lambda$ et $u\, e_\lambda = \lambda(u)e_\lambda = e_\lambda\, u$, pour tout $u \in U$. La représentation induite V se réalise dans l'idéal à gauche $\mathbf{C}[G]e_\lambda$ engendré par l'idempotent e_λ et l'algèbre d'entrelacement A s'identifie à la sous-algèbre $e_\lambda \mathbf{C}[G]e_\lambda$ de l'algèbre du groupe.

Soit X le groupe des caractères de $F^{\times}$. Pour $\alpha \in X$, on définit un caractère du centre C de G, qu'on désignera par le même symbole α, en posant

$$c(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha(c(a)) = \alpha(a), \quad \text{pour} \quad a \in F^{\times}.$$

Posons

$$e_\alpha := (q-1)^{-1} \sum_{c \in C} \alpha(c^{-1})c, \quad \text{pour} \quad \alpha \in X.$$

On remarque que

$$e_\alpha^2 = e_\alpha, e_\alpha e_{\alpha'} = 0, \quad \text{si} \quad \alpha \neq \alpha', \alpha, \alpha' \in X$$

et que

$$\sum_{\alpha \in X} e_\alpha = 1;$$

i.e. les e_α, $\alpha \in X$, forment un système d'idempotents, deux à deux orthogonaux, de somme 1. Chaque e_α, $\alpha \in X$, est un idempotent central, i.e. e_α est dans le centre de l'algèbre du groupe. Posons

$$H = CU .$$

On définit un caractère $\alpha\lambda$ de H par

$$(\alpha\lambda)(cu) = \alpha(c)\,\lambda(u), \quad \text{pour} \quad c \in C, u \in U .$$

Posons

$$V_\alpha = \operatorname{Ind}_H^G(\alpha\lambda), \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in X ;$$

cette représentation induite se réalise dans l'idéal à gauche $\mathbf{C}[G]\, e_\alpha\, e_\lambda$ et l'on a

$$V = \bigoplus_{\alpha \in X} V_\alpha .$$

L'algèbre d'entrelacement A_α de V_α s'identifie à l'algèbre $e_\alpha e_\lambda \mathbf{C}[G] e_\alpha e_\lambda$ qui est égale à $e_\lambda \mathbf{C}[G] e_\alpha e_\lambda$, d'où

$$A = \bigoplus_{\alpha \in X} A_\alpha .$$

Dans la suite, on se fixe un caractère central α et l'on étudie l'algèbre A_α.

§ 3. Description de A_α en termes de générateurs et relations

Posons $e = e_\theta$ avec $\theta = \alpha\lambda$, on a alors $A_\alpha = e\,\mathbf{C}[G]\,e = \operatorname{End}_G(\operatorname{Ind}_H^G(\theta))$. Soit R un système de représentants des doubles classes de G suivant H. On sait que l'ensemble

$$B = \{ere \mid r \in R, ere \neq 0\}$$

forme une base de A_α en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$. Pour $h, h' \in H$, $r \in R$, l'on a

$$e\,hrh'e = \theta(hh')\,ere .$$

Pour tout $g \in G$, on définit un caractère $g\theta$ de $g\,H\,g^{-1}$ par $(g\theta)(x) = \theta(g^{-1}xg)$, si $x \in g\,Hg^{-1}$. On sait que, pour tout $g \in G$, la condition $ege \neq 0$ équivaut à

$$\theta/_{H \cap gHg^{-1}} = g\,\theta/_{H \cap gHg^{-1}} .$$

Rappelons que