1.4. Commentaires sur les théorèmes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

l'existence de variétés de dimension 1 ou 2 le long desquelles le champ L reste tangent (sans qu'il s'agisse de variétés intégrales de $\mathscr{L}$) ainsi qu'une condition de signe sur les coefficients de L.

1.3. Enoncé des résultats principaux

Munis de ces notations, nous pouvons énoncer les principales réponses apportées à la question posée en 1.1.

Théorème 1.1. *Posons* $S_3 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0)$ *et* $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x) \geqslant 3\}$. *Si le problème est non caractéristique et si* $x_0 \in \bar{S}_3$, *alors pour tout voisinage* Ω *de* x_0, *il existe* $\omega \subset \Omega$ *avec* $\omega \cap S_3 \neq \emptyset$, $u \in C^\infty(\omega)$ *et* $a \in C^\infty(\omega)$ *tels que*

$$(1.1)\quad \begin{cases} (L + c_0 + a)\, u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega\,, \\ \operatorname{Supp} u' = \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}\,, \quad \textit{et} \\ \operatorname{Supp} a \subset \omega_+\,. \end{cases}$$

Moralement, ce théorème signifie que pour avoir la propriété d'unicité, il est nécessaire que $\operatorname{rg} \mathscr{L} < 3$ sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Cette condition est également suffisante lorsque nous faisons l'une des deux hypothèses « techniques » introduites au paragraphe précédent:

Théorème 1.2. *Posons* $S_3 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0)$ *et* $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x) \geqslant 3\}$; *supposons que le problème est non caractéristique et que* $x_0 \notin \bar{S}_3$; *supposons encore qu'il existe un voisinage* Ω *de* x_0 *tel que l'une des deux hypothèses « techniques » suivantes soit vérifiée: soit* L *vérifie la condition* (R) *dans* Ω, *soit* L *vérifie la condition* (P) *dans* $\mathring{\Omega}_+ = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) > \varphi(x_0)\}$. *Alors, pour tout voisinage* ω *de* x_0 *et toute* $u \in C^1(\omega)$ *solution du système*

$$(1.2)\quad \begin{cases} (L + c_0)\, u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega, \quad \textit{et} \\ u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}\,, \end{cases}$$

la fonction u *s'annule au voisinage de* x_0.

1.4. Commentaires sur les théorèmes

1. Comme nous le verrons au paragraphe 2.1, le théorème 1.1 s'applique essentiellement aux opérateurs de la forme

$$L = \partial_t + i[t^{k_1}\partial_{y_1} + t^{k_2}\partial_{y_2}]\,,\, k_1 \neq k_2\,,\, \varphi = t\,.$$

Ce théorème a été démontré dans le cadre plus général des opérateurs d'ordre m quelconque par Alinhac [1] et Robbiano [19] sous la condition $k_1 = 0$.

2. Le théorème 1.2 s'applique aux deux opérateurs suivants définis dans $\mathbf{R}^2$:

$$L_{(R)} = \partial_t + it(t+y)\,\partial_y \qquad \text{et} \qquad L_{(P)} = \partial_t + ie^{-1/t^2}\,\partial_y\,,\, \varphi = t\,,$$

le premier vérifiant la condition (R), mais pas la condition (P), et réciproquement pour le second. Ce théorème 1.2 est dû à Strauss et Trèves [24] qui l'ont démontré d'une part sous la condition rg $\mathscr{L}(x_0) = 2$ dans $\mathbf{R}^2$ (cas particulier de la condition (R)) et d'autre part en supposant que L vérifie la condition (P) dans tout un voisinage Ω de x_0.

3. Le théorème 1.2 devient faux si nous supprimons les hypothèses « techniques » ou même si nous supposons seulement que L vérifie la condition (R) dans $\mathring{\Omega}_+$; nous montrerons en effet au chapitre 4 que l'opérateur

$$\begin{cases} L = \partial_t + ie^{-1/t} \quad \sin\dfrac{1}{t}\,\partial_y & \text{si} \quad t > 0\,, \\ L = \partial_t & \text{si} \quad t \leqslant 0 \end{cases}$$

ne possède pas la propriété d'unicité par rapport à $t = 0$ pourvu que l'on ajoute un terme d'ordre inférieur, bien que rg $\mathscr{L} \equiv 2$ pour $t > 0$.

4. Dans l'énoncé du théorème 1.1, il convient de remarquer que l'ouvert ω ne contient pas nécessairement le point x_0; le théorème 1.1 signifie donc ceci: si nous ne savons pas toujours construire une solution de (1.1) au voisinage de x_0, nous savons du moins le faire au voisinage de x_1 pour un point x_1 arbitrairement proche de x_0 sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. En revanche, lorsque les hypothèses du théorème 1.2 sont vérifiées en x_0, elles le sont en tout point suffisamment proche de x_0 sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$, et la conclusion s'applique quel que soit le terme d'ordre inférieur; le théorème 1.2 est donc bien une réciproque du théorème 1.1. Cette remarque correspond à la propriété d'unicité « stable » dont nous avons parlé au paragraphe 1.1.

5. Les hypothèses du théorème 1.2 sous la condition (R) sont équivalentes au groupe d'hypothèses suivant: le problème est non caractéristique, et il existe un voisinage de x_0 où rg $\mathscr{L} \leqslant 2$ et où la propriété (Q) introduite par Nirenberg et Trèves [17] est vérifiée (cette propriété (Q) peut s'énoncer

de la façon suivante: par tout point $x \in \Omega$ tel que rg $\mathscr{L}(x) = 1$ passe une variété intégrale de $\mathscr{L}$). Sous la condition (P), nous pourrions omettre l'hypothèse $x_0 \notin \bar{S}_3$ (car (P) dans $\mathring{\Omega}_+ \Rightarrow \bar{S}_3 \cap \Omega = \emptyset$), mais nous préférons considérer ce groupe d'hypothèses comme l'hypothèse $x_0 \notin \bar{S}_3$ à laquelle nous avons rajouté une hypothèse « technique ».

6. *Plan de l'ensemble.* Nous exposerons les techniques de construction de contre-exemples à l'unicité dans le chapitre 2 que nous consacrons à démontrer le théorème 1.1. Symétriquement, le chapitre 3 contiendra la démonstration du théorème 1.2 comme illustration des méthodes développées pour obtenir l'unicité. Par ces deux théorèmes, nous avons « génériquement » répondu à la question posée; nous avons cependant écarté trois problèmes marginaux qui feront l'objet des chapitres suivants: au chapitre 4, nous étudierons sur un modèle la situation lorsque rg $\mathscr{L} \leqslant 2$ mais que les hypothèses « techniques » ne sont pas vérifiées; au chapitre 5, nous étudierons le problème caractéristique; au chapitre 6 enfin, nous étudierons l'influence du terme d'ordre zéro, c_0.

1.5. Choix des coordonnées pour les problèmes non caractéristiques

Dans ce paragraphe, nous donnons pour les problèmes non caractéristiques (étudiés aux chapitres 2, 3 et 4) un choix de coordonnées permettant d'écrire sous une forme canonique l'opérateur à étudier.

Lemme 1.3. *Supposons que le problème soit non caractéristique; alors il existe près de* x_0 *un système de coordonnées* $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ *tel que:*

1. $x_0 = (0, 0)$

2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$

3. $L + c_0 = a(y, t)\,[\partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)]$

où $a: \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$, $b: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-1}$ *et* $c: \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ *sont des fonctions* C^∞ *au voisinage de* $(0, 0)$ *et* $a(y, t) \neq 0$ *au voisinage de* $(0, 0)$.

Démonstration. Commençons par choisir des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ telles que $x_0 = (0, \ldots, 0)$ et $x_n = \varphi(x) - \varphi(x_0)$; comme le problème est non caractéristique, nous savons que $a_n(0, \ldots, 0) \neq 0$; on peut donc écrire

$$L + c_0 = a_n(x)\left[\partial_n + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j(x) + i\beta_j(x))\,\partial_j + c_1(x)\right]$$