D'autre part, les unités de E ont pour image le réseau $\mathbf{Z}^r$ dans $\mathbf{R}^r$ et les racines de l'unité contenues dans E ont pour image le vecteur nul. Si on note w le nombre de ces racines alors le cardinal de U est $\frac{w}{2}$.

Finalement l'expression K devient

$$K = 2^{r_1} \cdot w^{-1} n \, R \sum_{j=1}^{h} \int_{x \in [0,1]^r} Z\left(P_{j,x}^0, \frac{ns}{2}\right) dx\,,$$

où on a noté $P_{j,x}$ la matrice

$$P_{j,x} = P_j^{-1} \Delta D(\tau)\, {}^t\overline{\Delta}\, {}^t(\overline{P_j^{-1}})\,.$$

Réécrivons à présent l'égalité du théorème 1 avec les expressions qui viennent d'être calculées.

PROPOSITION 12 (Formule de Hecke). *Soit*

$$\Lambda_E(s) = (2^{r_2} \pi^{n/2} |d_E|^{\frac{1}{2}})^{-s}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2} \zeta_E(s)$$

et pour une matrice P *réelle, symétrique, définie positive, posons*

$$\Lambda(P, s) = \pi^{-s} \Gamma(s)\, Z(P, s)\,.$$

Alors

$$w \cdot \Lambda_E(s) = 2^{r_1 - 1} \cdot n \, R \sum_{j=1}^{h} \int_{x \in [0,1]^r} \Lambda\left(P_{j,x}^0, \frac{ns}{2}\right) dx\,.$$

Remarque. Il serait intéressant de faire le calcul précédent dans un cas plus général où l'on considère un quasi-caractère ω de $\mathbf{A}^\times$ quelconque. Ainsi $\omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}$ correspond à un caractère de Hecke sur le groupe des idéaux de E (cf. [4], chap. 8, § 3, p. 156) et la difficulté est alors de calculer l'intégrale toroïdale aux places finies sur lesquelles le quasi-caractère $\omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}$ se ramifie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL, A. *Linear algebraic groups.* Benjamin (1969).

[2] BOREVITCH, Z. I. et I. R. CHAFAREVITCH. *Théorie des Nombres.* Gauthiers Villars (1967).

[3] BOURBAKI, N. *Algèbre, chapitres V, VII.* Masson (1981).

[4] GOLDSTEIN, L. J. *Analytic number theory.* Prentice Hall (1971).

[5] SHIMURA, G. *The arithmetic theory of automorphic functions.* Iwanami Shoten & Princeton Univ. Press (1971).

[6] WEIL, A. *Basic number theory.* Springer-Verlag (1967).

REFERENCES

[Ha] HARDER, G. *Period integrals of cohomology classes which are represented by Eisenstein series.* In *Automorphic forms, Representation Theory and Arithmetic*, Bombay Colloquium, Springer-Verlag, pp. 41-115 (1979).

[He] HECKE, E. *Über die Kroneckersche grenzformel für reelle quadratische körper und die klassenzahl relativ-abelscher körper. Mathematische Werke*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen (1970), pp. 198-207 (1917).

[L] LANG, S. $SL_2(\mathbf{R})$. Addison Wesley, Reading (1975).

[S] STARK, M. *The analytic theory of algebraic numbers. Bull. A.M.S. 81* (1975), pp. 961-972.

[T] TERRAS, A. *Fourier analysis on symmetric spaces and applications to number theory.* Univ. of Cal. at San Diego, preprint (1981).

[W] WIELONSKY, F. Intégrales toroïdales des séries d'Eisenstein et fonctions zêta. *C. R. Acad. Sci. Paris, 299* (1984), pp. 727-730.

[Z] ZAGIER, D. *Eisenstein series and the Riemann Zeta function.* In *Automorphic forms, Representation theory and Arithmetic*, Bombay Colloquium, Springer-Verlag, pp. 275-301 (1979).

(Reçu le 23 avril 1984)

Franck Wielonsky

Département de Mathématiques
Université de Nice
Parc Valrose
F-06034 Nice

et

Institut Max Planck
Gottfried Claren Strasse 26
D-5300 Bonn 3