Chapitre V

Calcul des intégrales toroïdales des séries d'Eisenstein

On désigne toujours par k un corps global, par $\mathbf{A}_k$ les adèles de k, par E une extension algébrique de k de dimension n et l'espace vectoriel E_{vect} sous-jacent à E est noté $V(k)$.

On rappelle que l'on a le diagramme d'isomorphismes commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
(E\otimes\mathbf{A}_k)^\times \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\mu"'] & T(\mathbf{A}_k) \arrow[d, "\nu"] \\
& \mathbf{A}_E^\times
\end{tikzcd}$$

Soit μ_E la mesure de Haar sur le groupe des idèles de $\mathbf{A}_E$; on note μ_T la mesure de Haar du groupe multiplicatif $T(\mathbf{A}_k)$ transportée par l'isomorphisme ν^{-1}, ainsi que la mesure induite sur le quotient $T(k)\backslash T(\mathbf{A}_k)$. On note de plus μ la mesure de Haar sur chacun des quotients $k^\times\backslash\mathbf{A}_k^\times$ et $Z(k)\backslash Z(\mathbf{A}_k)$.

Il existe une unique mesure de Haar notée $d\mu_{Z\backslash T}$ sur le quotient $T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)$ telle que pour toute fonction $f\in\mathscr{K}(T(k)\backslash T(\mathbf{A}_k))$, on ait

$$\int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)}\int_{Z(k)\backslash Z(\mathbf{A}_k)} f(x\xi)\,d\mu(\xi)\,d\mu_{Z\backslash T}(x) = \int_{T(k)\backslash T(\mathbf{A}_k)} f(x)d\mu_T(x)\,.$$

On calcule à présent l'intégrale des séries d'Eisenstein sur le tore $T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)$. Soit g *dans* $G(\mathbf{A}_k)$, φ dans $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$ et ω un quasi-caractère de $\mathbf{A}_k^\times$; on a les égalités suivantes:

$$\int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)} E(\varphi, tg, \omega)\, d\mu_{Z\backslash T}(t)$$

$$= \int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)} \int_{k^\times\backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det z\, tg) \sum_{\xi\in V(k)-\{0\}} \varphi(\xi z\, tg)\, d\mu(z) d\mu_{Z\backslash T}(t)$$

$$= \int_{T(k)\backslash T(A_k)} \omega(\det tg) \sum_{\xi\in V(k)-\{0\}} \varphi(\xi tg) d\mu_T(t)\,.$$

En observant que si t est un élément de $T(\mathbf{A}_k)$, on a l'égalité

$$\det t = N_{E\backslash k}(\nu(t))\,;$$

l'intégrale précédente devient

$$\omega(\det g) \int_{E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times} \sum_{\xi\in E^\times} \varphi(\xi tg)\cdot \omega(N_{E\backslash k}(t))\, d\mu_E(t)$$

$$= \omega(\det g)\cdot \int_{\mathbf{A}_E^\times} \varphi(tg)\cdot \omega(N_{E\backslash k}(t))\, d\mu_E(t)\,.$$

Pour φ une fonction de $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$ et ω un quasi-caractère de $\mathbf{A}_E^\times$, on pose

$$\zeta(\varphi, \omega) = \int_{\mathbf{A}_E^\times} \varphi(t)\omega(t)\, d\mu_E(t)$$

et $$\varphi_g(t) = \varphi(tg) \quad \text{pour} \quad g \in G(\mathbf{A}_k)\,;$$

on a démontré:

THÉORÈME 1. *Soit* k *un corps global,* E *une extension algébrique finie de* k *de dimension* n, g *une matrice de* $G(\mathbf{A}_k)$, φ *une fonction de* $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$, ω *un quasi-caractère de* $\mathbf{A}_k^\times$; *on a l'identité suivante:*

$$\int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)} E(\varphi, tg, \omega)\, d\mu_{Z\backslash T}(t) = \omega(\det g)\cdot \zeta(\varphi_g, \omega \circ N_{E\backslash k})\,.$$

Remarque. L'intégrale

$$\int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)} E(\varphi, tg, \omega)\, d\mu_{Z\backslash T}(t)$$

est appelée une *intégrale toroïdale* de séries d'Eisenstein.