

# Calcul des intégrales toroïdales des séries d'Eisenstein

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Chapitre V

## CALCUL DES INTÉGRALES TOROÏDALES DES SÉRIES D'EISENSTEIN

On désigne toujours par  $k$  un corps global, par  $\mathbf{A}_k$  les adèles de  $k$ , par  $E$  une extension algébrique de  $k$  de dimension  $n$  et l'espace vectoriel  $E_{\text{vect}}$  sous-jacent à  $E$  est noté  $V(k)$ .

On rappelle que l'on a le diagramme d'isomorphismes commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (E \otimes \mathbf{A}_k)^\times & \xrightarrow{\pi} & T(\mathbf{A}_k) \\ & \searrow \mu & \downarrow \nu \\ & & \mathbf{A}_E^\times \end{array}$$

Soit  $\mu_E$  la mesure de Haar sur le groupe des idèles de  $\mathbf{A}_E$ ; on note  $\mu_T$  la mesure de Haar du groupe multiplicatif  $T(\mathbf{A}_k)$  transportée par l'isomorphisme  $\nu^{-1}$ , ainsi que la mesure induite sur le quotient  $T(k) \backslash T(\mathbf{A}_k)$ . On note de plus  $\mu$  la mesure de Haar sur chacun des quotients  $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$  et  $Z(k) \backslash Z(\mathbf{A}_k)$ .

Il existe une unique mesure de Haar notée  $d\mu_{Z \backslash T}$  sur le quotient  $T(k)Z(\mathbf{A}_k) \backslash T(\mathbf{A}_k)$  telle que pour toute fonction  $f \in \mathcal{K}(T(k) \backslash T(\mathbf{A}_k))$ , on ait

$$\int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k) \backslash T(\mathbf{A}_k)} \int_{Z(k) \backslash Z(\mathbf{A}_k)} f(x\xi) d\mu(\xi) d\mu_{Z \backslash T}(x) = \int_{T(k) \backslash T(\mathbf{A}_k)} f(x) d\mu_T(x).$$

On calcule à présent l'intégrale des séries d'Eisenstein sur le tore  $T(k)Z(\mathbf{A}_k) \backslash T(\mathbf{A}_k)$ . Soit  $g$  dans  $G(\mathbf{A}_k)$ ,  $\varphi$  dans  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$  et  $\omega$  un quasi-caractère de  $\mathbf{A}_k^\times$ ; on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
& \int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)} E(\varphi, tg, \omega) d\mu_{Z\backslash T}(t) \\
&= \int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)} \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det z tg) \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi z tg) d\mu(z) d\mu_{Z\backslash T}(t) \\
&= \int_{T(k)\backslash T(\mathbf{A}_k)} \omega(\det tg) \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi tg) d\mu_T(t).
\end{aligned}$$

En observant que si  $t$  est un élément de  $T(\mathbf{A}_k)$ , on a l'égalité

$$\det t = N_{E\backslash k}(v(t));$$

l'intégrale précédente devient

$$\begin{aligned}
& \omega(\det g) \int_{E^\times \backslash \mathbf{A}_E^\times} \sum_{\xi \in E^\times} \varphi(\xi tg) \cdot \omega(N_{E\backslash k}(t)) d\mu_E(t) \\
&= \omega(\det g) \cdot \int_{\mathbf{A}_E^\times} \varphi(tg) \cdot \omega(N_{E\backslash k}(t)) d\mu_E(t).
\end{aligned}$$

Pour  $\varphi$  une fonction de  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$  et  $\omega$  un quasi-caractère de  $\mathbf{A}_E^\times$ , on pose

$$\zeta(\varphi, \omega) = \int_{\mathbf{A}_E^\times} \varphi(t)\omega(t) d\mu_E(t)$$

et  $\varphi_g(t) = \varphi(tg)$  pour  $g \in G(\mathbf{A}_k)$ ;

on a démontré:

**THÉORÈME 1.** *Soit  $k$  un corps global,  $E$  une extension algébrique finie de  $k$  de dimension  $n$ ,  $g$  une matrice de  $G(\mathbf{A}_k)$ ,  $\varphi$  une fonction de  $\mathcal{S}(V(\mathbf{A}_k))$ ,  $\omega$  un quasi-caractère de  $\mathbf{A}_k^\times$ ; on a l'identité suivante:*

$$\int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)} E(\varphi, tg, \omega) d\mu_{Z\backslash T}(t) = \omega(\det g) \cdot \zeta(\varphi_g, \omega \circ N_{E\backslash k}).$$

*Remarque.* L'intégrale

$$\int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)} E(\varphi, tg, \omega) d\mu_{Z\backslash T}(t)$$

est appelée une *intégrale toroïdale* de séries d'Eisenstein.