

1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DU CAP-PRODUIT

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DU CAP-PRODUIT À COEFFICIENTS LOCAUX

par Jean-Claude HAUSMANN et Antoine ZAHND

Soit X un CW -complexe connexe par arc et soient M et N deux $\pi_1(X)$ -modules. Le but de cet article est de caractériser la famille d'applications « cap-produit » :

$$H_i(X; M) \times H^k(X; N) \rightarrow H_{i-k}(X; M \otimes N) \\ (z, \alpha) \mapsto z \cap \alpha$$

par quatre de ses propriétés: naturalité en X , comportement par rapport aux suites exactes courtes de coefficients (en M et en N) ainsi que description explicite en dimension $i = k = 0$. La caractérisation est complète, sauf peut-être dans le cas $i = k > 0$ où notre technique nécessite l'hypothèse que M est sans \mathbf{Z} -torsion ou que N est un $F\pi_1(X)$ -module pour un corps F (Théorème (2.1)).

Un point essentiel de notre démonstration est l'utilisation du théorème de Kan-Thurston [KT] qui permet de se ramener au cas où X est un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\pi, 1)$. Dans ce cas, la naturalité en X n'est même plus nécessaire (Proposition (2.2)).

Le § 3 contient quelques remarques et suggestions d'applications.

Les auteurs remercient M. Kervaire pour d'utiles conversations.

1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DU CAP-PRODUIT

Soit X un CW -complexe. Soit $S_j(X)$ l'ensemble des j -simplexes singuliers de X , i.e. des applications continues $\sigma: \Delta^j \rightarrow X$, où

$$\Delta^j = \{(x_0, \dots, x_j) \in \mathbf{R}^{j+1} \mid x_r \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum x_r = 1\}.$$

Le groupe $C_j(X)$ des j -chaînes singulières de X est le groupe abélien libre de base $S_j(X)$. Pour $i, k \leq j$, on définit la i^{e} face avant ${}^i\sigma: \Delta^i \rightarrow X$ et la k^{e} face arrière $\sigma^k: \Delta^k \rightarrow X$ de $\sigma \in S_j(X)$ de la façon habituelle:

$$\begin{aligned} {}^i\sigma(x_0, \dots, x_i) &= \sigma(x_0, \dots, x_i, 0, \dots, 0) \\ \sigma^k(x_0, \dots, x_k) &= \sigma(0, \dots, 0, x_0, \dots, x_k) \end{aligned}$$

Supposons dorénavant que X est connexe par arc et soit \tilde{X} son revêtement universel. L'action de $\pi = \pi_1(X)$ sur \tilde{X} munit le groupe $C_j(\tilde{X})$ d'une structure de π -module (à gauche). Ce π -module est π -libre de base $\{\tilde{\sigma} \mid \sigma \in S_j(X)\} \subset S_j(\tilde{X})$, où $\tilde{\sigma} \in S_j(\tilde{X})$ est un relevé de $\sigma \in S_j(X)$. L'opérateur bord $\partial: C_j(\tilde{X}) \rightarrow C_{j-1}(\tilde{X})$ est l'application π -linéaire définie sur $\tilde{\sigma} \in S_j(\tilde{X})$ par

$$\partial \tilde{\sigma}(x_0, \dots, x_{j-1}) = \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^r \tilde{\sigma}(x_0, \dots, x_{r-1}, 0, x_r, \dots, x_{j-1}).$$

Soit M un π -module à droite. Le groupe d'homologie $H_r(X; M)$ est défini comme le r^{e} groupe d'homologie du complexe

$$(M \otimes_{\pi} C_*(\tilde{X}); id_M \otimes_{\pi} \partial).$$

Si N est un π -module à gauche, le groupe de cohomologie $H^r(\tilde{X}; N)$ est le r^{e} groupe d'homologie du complexe $(Hom_{\pi}(C_*(\tilde{X}); N); \delta)$, où $\delta(\alpha)(z) = (-1)^r \cdot \alpha(\partial(z))$ pour $z \in C_r(\tilde{X})$.

Le cap produit :

$$\cap: (M \otimes_{\pi} C_i(\tilde{X})) \times Hom_{\pi}(C_k(\tilde{X}); N) \rightarrow (M \otimes N) \otimes_{\pi} C_{i-k}(\tilde{X})$$

est l'application \mathbf{Z} -bilinéaire qui, pour $m \in M$, $\tilde{\sigma} \in S_i(\tilde{X})$ et $\alpha \in Hom_{\pi}(C_k(\tilde{X}); N)$ a pour définition :

$$(m \otimes_{\pi} \tilde{\sigma}) \cap \alpha = (m \otimes \alpha({}^k\tilde{\sigma})) \otimes_{\pi} \tilde{\sigma}^{i-k}.$$

Le symbole \otimes dénote le produit sur \mathbf{Z} par opposition à \otimes_{π} qui désigne celui sur $\mathbf{Z}\pi$. Le groupe $M \otimes N$ est muni de la structure de π -module à droite donnée par $(m \otimes n)g = mg \otimes g^{-1}n$. Grâce à cette structure, on vérifie immédiatement que l'application « cap-produit » ci-dessus est bien définie. Un calcul direct donne la formule :

$$\partial(e \cap \alpha) = (-1)^k \partial e \cap \alpha + e \cap \delta \alpha, e = m \otimes_{\pi} z \in M \otimes_{\pi} C_i(\tilde{X}).$$

Cette formule montre que le cap-produit ci-dessus induit un cap-produit en homologie :

$$\cap: H_i(X; M) \times H^k(X; N) \rightarrow H_{i-k}(X; M \otimes N)$$

Parmi les nombreuses propriétés classiques du cap-produit, nous allons en dégager quatre que nous prouverons être caractéristiques au §3. Nous introduisons directement le langage qui sera utilisé au §3.

(1.1) PROPOSITION. *La famille d'applications*

$$\Phi_X^{ik}(M, N): H_i(X; M) \times H^k(X, N) \rightarrow H_{i-k}(X; M \otimes N)$$

donnée par le cap-produit $\Phi_X^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$ satisfait aux propriétés I, II, III et IV décrite ci-dessous.

Propriété I: Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue entre CW-complexes connexes par arc. Soit M un $\pi_1(Y)$ -module à droite et N un $\pi_1(Y)$ -module à gauche, qui seront aussi considérés au besoin comme $\pi_1(X)$ -modules via l'homomorphisme $\pi_1 f$. Alors, pour tout $z \in H_i(X; M)$ et $\alpha \in H^k(Y; N)$ on a la formule:

$$f_* \Phi_X^{ik}(M, N)(z, f^*(\alpha)) = \Phi_Y^{ik}(M, N)(f_*(z), \alpha).$$

Propriété II: Soit $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ une suite exacte de π -modules à gauche. Soit M un π -module à droite et S le π -module $\ker(M \otimes N \rightarrow M \otimes N'')$. On a donc une suite exacte courte

$$0 \rightarrow S \rightarrow M \otimes N \rightarrow M \otimes N'' \rightarrow 0$$

et une surjection $\mu: M \otimes N' \rightarrow S$. Alors, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H_i(X; M) \times H^k(X; N'') & \xrightarrow{\Phi_X^{ik}(M, N'')} & H_{i-k}(X; M \otimes N'') \\ \downarrow \text{id} \times \delta & & \searrow \partial \\ H_i(X; M) \times H^{k+1}(X; N') & \xrightarrow{\Phi_X^{i(k+1)}(M, N')} & H_{i-k-1}(X; M \otimes N') \\ & & \nearrow \mu_* \end{array}$$

Propriété III: Soit $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de π -modules à droite. Soit N un π -module à gauche et T le π -module $\ker(M \otimes N \rightarrow M'' \otimes N)$. On a donc une suite courte $0 \rightarrow T \rightarrow M \otimes N \rightarrow M'' \otimes N \rightarrow 0$ et une surjection $\nu: M' \otimes N \rightarrow T$. Alors, le diagramme suivant est $(-1)^k$ -commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 H_i(X, M'') \times H^k(X; N) & \xrightarrow{\Phi_X^{ik}(M'', N)} & H_{i-k}(X; M'' \otimes N) \\
 \downarrow \partial \times \text{id} & & \searrow \partial \\
 H_{i-1}(X; M') \times H^k(X; N) & \xrightarrow{\Phi_X^{(i-1)k}(M', N)} & H_{i-k-1}(X; M' \otimes N) \\
 & & \nearrow v_* \\
 & & H_{i-k-1}(X; T)
 \end{array}$$

Pour énoncer la propriété IV on utilise les identifications classiques :

$$H_0(X; M) = M / \{m - m\alpha \mid m \in M, \alpha \in \mathbf{Z} \pi\},$$

$$H^0(X; N) = \{n \in N \mid gn = n \text{ pour tout } g \in \pi\} \subset N.$$

On vérifie que l'application $M \times H^0(X; N) \subset M \times N \rightarrow M \otimes N$ donnée par $(m, n) \rightarrow m \otimes n$ produit, par passage aux quotients, une application $H_0(X; M) \times H^0(X; N) \rightarrow H_0(X; M \otimes N)$ que l'on notera $(m, n) \mapsto \overline{m \otimes n}$.

$$\text{Propriété IV: } \phi_X^{00}(M, N)(m, n) = \overline{m \otimes n}.$$

2. LE THÉORÈME DE CARACTÉRISATION

(2.1) THÉORÈME. Soit

$$\phi_X^{ik}(M, N): H_i(X; M) \times H^k(X; N) \rightarrow H_{i-k}(X; M \otimes N)$$

une famille d'applications définies pour tout $i, k \geq 0$ et tout triple (X, M, N) , où X est un CW-complexe connexe par arc, M un $\pi_1(X)$ -module à droite et N un $\pi_1(X)$ -module à gauche. Supposons que la famille $\phi_X^{ik}(M, N)$ satisfait aux propriétés I à IV. Alors $\phi_X^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$, sauf peut-être lorsque $i = k > 0$. Cette dernière restriction est inutile lorsque M est sans \mathbf{Z} -torsion ou que N est un $F\pi_1(X)$ -module pour un corps F .

Le reste de ce paragraphe est dévolu à la démonstration du théorème (2.1). Un théorème de Kan-Thurston [KT] affirme que, pour tout