1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DU CAP-PRODUIT

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

L'Enseignement Mathématique, t. 31 (1985), p. 71-79

PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DU CAP-PRODUIT À COEFFICIENTS LOCAUX

par Jean-Claude HAUSMANN et Antoine ZAHND

Soit X un CW-complexe connexe par arc et soient M et N deux $\pi_1(X)$-modules. Le but de cet article est de caractériser la famille d'applications « cap-produit »:

$$H_i(X; M) \times H^k(X; N) \to H_{i-k}(X; M \otimes N)$$
$$(z, \alpha) \mapsto z \cap \alpha$$

par quatre de ses propriétés: naturalité en X, comportement par rapport aux suites exactes courtes de coefficients (en M et en N) ainsi que description explicite en dimension $i = k = 0$. La caractérisation est complète, sauf peut-être dans le cas $i = k > 0$ où notre technique nécessite l'hypothèse que M est sans $\mathbf{Z}$-torsion ou que N est un $F\pi_1(X)$-module pour un corps F (Théorème (2.1)).

Un point essentiel de notre démonstration est l'utilisation du théorème de Kan-Thurston [KT] qui permet de se ramener au cas où X est un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\pi, 1)$. Dans ce cas, la naturalité en X n'est même plus nécessaire (Proposition (2.2)).

Le § 3 contient quelques remarques et suggestions d'applications.

Les auteurs remercient M. Kervaire pour d'utiles conversations.

1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DU CAP-PRODUIT

Soit X un CW-complexe. Soit $S_j(X)$ l'ensemble des j-simplexes singuliers de X, i.e. des applications continues $\sigma: \Delta^j \to X$, où

$$\Delta^j = \{(x_0, ..., x_j) \in \mathbf{R}^{j+1} \mid x_r \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \Sigma x_r = 1\}.$$

Le groupe $C_j(X)$ des j-chaînes singulières de X est le groupe abélien libre de base $S_j(X)$. Pour $i, k \leqslant j$, on définit la i^e face avant ${}^i\sigma: \Delta^i \to X$ et la k^e face arrière $\sigma^k: \Delta^k \to X$ de $\sigma \in S_j(X)$ de la façon habituelle:

$$ {}^{i}\sigma(x_0, \dots x_i) = \sigma(x_0, \dots x_i, 0, \dots, 0) $$
$$ \sigma^{k}(x_0, \dots, x_k) = \sigma(0, \dots, 0, x_0, \dots, x_k) $$

Supposons dorénavant que X est connexe par arc et soit $\tilde{X}$ son revêtement universel. L'action de $\pi = \pi_1(X)$ sur $\tilde{X}$ munit le groupe $C_j(\tilde{X})$ d'une structure de π-module (à gauche). Ce π-module est π-libre de base $\{\tilde{\sigma} \mid \sigma \in S_j(X)\} \subset S_j(\tilde{X})$, où $\tilde{\sigma} \in S_j(\tilde{X})$ est un relevé de $\sigma \in S_j(X)$. L'opérateur bord $\partial\colon C_j(\tilde{X}) \to C_{j-l}(\tilde{X})$ est l'application π-linéaire définie sur $\tilde{\sigma} \in S_j(\tilde{X})$ par

$$ \partial \tilde{\sigma}(x_0, \dots, x_{j-1}) = \sum_{r=0}^{j} (-1)^r \tilde{\sigma}(x_0, ., x_{r-1}, 0, x_r, \dots, x_{j-1}) . $$

Soit M un π-module à droite. Le groupe d'homologie $H_r(X; M)$ est défini comme le r[e] groupe d'homologie du complexe

$$ (M \otimes_\pi C_*(\tilde{X}); id_M \otimes_\pi \partial) . $$

Si N est un π-module à gauche, le groupe de cohomologie $H^r(\tilde{X}; N)$ est le r^e groupe d'homologie du complexe $(Hom_\pi(C_*(\tilde{X}); N); \delta)$, où $\delta(\alpha)(z) = (-1)^r \cdot \alpha(\partial(z))$ pour $z \in C_r(\tilde{X})$.

Le cap produit:

$$ \cap\colon (M \otimes_\pi C_i(\tilde{X})) \times Hom_\pi(C_k(\tilde{X}); N) \to (M \otimes N) \otimes_\pi C_{i-k}(\tilde{X}) $$

est l'application $\mathbf{Z}$-bilinéaire qui, pour $m \in M$, $\tilde{\sigma} \in S_i(\tilde{X})$ et $\alpha \in Hom_\pi(C_k(\tilde{X}); N)$ a pour définition:

$$ (m \otimes_\pi \tilde{\sigma}) \cap \alpha = (m \otimes \alpha({}^{k}\tilde{\sigma})) \otimes_\pi \tilde{\sigma}^{i-k} . $$

Le symbole $\otimes$ dénote le produit sur $\mathbf{Z}$ par opposition à $\otimes_\pi$ qui désigne celui sur $\mathbf{Z}\pi$. Le groupe $M \otimes N$ est muni de la structure de π-module à droite donnée par $(m \otimes n) g = mg \otimes g^{-1} n$. Grâce à cette structure, on vérifie immédiatement que l'application « cap-produit » ci-dessus est bien définie. Un calcul direct donne la formule:

$$ \partial(e \cap \alpha) = (-1)^k \partial e \cap \alpha + e \cap \delta\alpha, e = m \otimes_\pi z \in M \otimes_\pi C_i(\tilde{X}) . $$

Cette formule montre que le cap-produit ci-dessus induit un cap-produit en homologie:

$$ \cap\colon H_i(X; M) \times H^k(X; N) \to H_{i-k}(X; M \otimes N) $$

Parmi les nombreuses propriétés classiques du cap-produit, nous allons en dégager quatre que nous prouverons être caractéristiques au §3. Nous introduisons directement le langage qui sera utilisé au §3.

(1.1) PROPOSITION. *La famille d'applications*

$$\Phi_X^{ik}(M, N): H_i(X; M) \times H^k(X, \mathrm{N}) \to H_{i-k}(X; M \otimes N)$$

donnée par le cap-produit $\Phi_X^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$ *satisfait aux propriétés I, II, III et IV décrite ci-dessous.*

Propriété I: Soit $f: X \to Y$ une application continue entre CW-complexes connexes par arc. Soit M un $\pi_1(Y)$-module à droite et N un $\pi_1(Y)$-module à gauche, qui seront aussi considérés au besoin comme $\pi_1(X)$-modules via l'homomorphisme $\pi_1 f$. Alors, pour tout $z \in H_i(X; M)$ et $\alpha \in H^k(Y; N)$ on a la formule:

$$f_* \Phi_X^{ik}(M, N)\big(z, f^*(\alpha)\big) = \Phi_Y^{ik}(M, N)\big(f_*(z), \alpha\big).$$

Propriété II: Soit $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ une suite exacte de π-modules à gauche. Soit M un π-module à droite et S le π-module $ker(M \otimes N \to M \otimes N'')$. On a donc une suite exacte courte

$$0 \to S \to M \otimes N \to M \otimes N'' \to 0$$

et une surjection $\mu: M \otimes N' \twoheadrightarrow S$. Alors, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
H_i(X; M) \times H^k(X; N'') \arrow[r, "\Phi_X^{ik}(M, N'')"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \delta"'] & H_{i-k}(X; M \otimes N'') \arrow[dr, "\partial"] & \\
& & H_{i-k-1}(X; S) \\
H_i(X; M) \times H^{k+1}(X; N') \arrow[r, "\Phi_X^{i(k+1)}(M, N')"] & H_{i-k-1}(X; M \otimes N') \arrow[ur, "\mu_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Propriété III: Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de π-modules à droite. Soit N un π-module à gauche et T le π-module $ker(M \otimes N \to M'' \otimes N)$. On a donc une suite courte $0 \to T \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ et une surjection $\nu: M' \otimes N \twoheadrightarrow T$. Alors, le diagramme suivant est $(-1)^k$-commutatif:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
H_i(X, M'') \times H^k(X; N) \arrow[r, "\Phi_X^{ik}(M'', N)"] \arrow[d, "\partial \times \mathrm{id}"'] & H_{i-k}(X; M''\otimes N) \arrow[dr, "\partial"] & \\
& & H_{i-k-1}(X; T) \\
H_{i-1}(X; M') \times H^k(X; N) \arrow[r, "\Phi_X^{(i-1)k}(M', N)"] & H_{i-k-1}(X; M'\otimes N) \arrow[ur, "\upsilon_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Pour énoncer la propriété IV on utilise les identifications classiques:

$$H_0(X; M) = M \big/ \{m - m\alpha \mid m \in M, \alpha \in \mathbf{Z}\pi\},$$

$$H^0(X; N) = \{n \in N \mid gn = n \quad \text{pour tout} \quad g \in \pi\} \subset N.$$

On vérifie que l'application $M \times H^0(X; N) \subset M \times N \to M \otimes N$ donnée par $(m, n) \to m \otimes n$ produit, par passage aux quotients, une application $H_0(X; M) \times H^0(X; N) \to H_0(X; M \otimes N)$ que l'on notera $(m, n) \mapsto m \mathbin{\overline{\otimes}} n$.

Propriété IV: $\phi_X^{00}(M, N)(m, n) = m \mathbin{\overline{\otimes}} n.$

2. Le théorème de caractérisation

(2.1) Théorème. *Soit*

$$\phi_X^{ik}(M, N) \colon H_i(X; M) \times H^k(X; N) \to H_{i-k}(X; M \otimes N)$$

une famille d'applications définies pour tout $i, k \geqslant 0$ *et tout triple* (X, M, N), *où* X *est un CW-complexe connexe par arc,* M *un* $\pi_1(X)$*-module à droite et* N *un* $\pi_1(X)$*-module à gauche. Supposons que la famille* $\phi_X^{ik}(M, N)$ *satisfait aux propriétés I à IV. Alors* $\phi_X^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$, *sauf peut-être lorsque* $i = k > 0$. *Cette dernière restriction est inutile lorsque* M *est sans* $\mathbf{Z}$*-torsion ou que* N *est un* $F\pi_1(X)$*-module pour un corps* F.

Le reste de ce paragraphe est dévolu à la démonstration du théorème (2.1). Un théorème de Kan-Thurston [KT] affirme que, pour tout