

## § 2. Arc Mineur

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## § 2. ARC MINEUR

On entend ici par « Arc Mineur », le complémentaire dans  $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$  de l'arc majeur  $M(\Delta)$ . On désire majorer le module de la somme  $H(\xi)$  lorsque  $\xi$  appartient à un tel arc mineur.

Pour cela, l'hypothèse (H1) est indispensable. On définira d'ailleurs un ensemble  $T(\Delta) \subset M(\Delta)$ , mieux adapté à l'hypothèse (H1) et on obtiendra, au lemme 2.2 une majoration de  $|H(\xi)|$  pour  $\xi$  appartenant au complémentaire de  $T(\Delta)$  dans  $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ .

Nous aurons ainsi les moyens de démontrer le principal résultat de ce paragraphe, c'est-à-dire le théorème 2. Enfin l'application stricte de l'hypothèse (H1) qui concerne des sommes trigonométriques d'un type précis nous contraint à des précautions qui sont l'objet du lemme 1 et qui compliquent légèrement, mais sans aucune conséquence sur les principaux résultats de ce travail, l'énoncé du théorème 2. Ces précautions concernent le choix de la boîte  $\mathcal{B}$  puis celui de la variable  $P$ .

LEMME 2.1. *Il existe un sous-ensemble dense  $\mathcal{S}$  de l'ensemble des boîtes  $\mathcal{B}$  de  $\mathbf{R}^n$  tel que, pour toute boîte  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{S}$ , il existe un sous-ensemble non borné de  $\mathbf{R}$ , noté  $\mathcal{P}(\mathcal{B})$  avec, pour tout  $P$  élément de  $\mathcal{P}(\mathcal{B})$  et pour  $k$  égal à 0 ou 1, l'égalité suivante*

$$(2.1) \quad \mathbf{Z}^n \cap (\theta * 1_{P\mathcal{B}})^{-1}(\{k\}) = \mathbf{Z}^n \cap 1_{P\mathcal{B}}^{-1}(\{k\}).$$

*Remarque.* Une explication romanesque du lemme 2.1 et de sa démonstration serait la suivante.

L'adoucissement de la fonction  $1_{P\mathcal{B}}$  réalisé par le produit de convolution  $\theta * 1_{P\mathcal{B}}$ , se produit au voisinage du bord de la boîte  $P\mathcal{B}$ . Si ce bord est à distance  $> \frac{1}{3}$  du réseau  $\mathbf{Z}^n$  et si l'adoucissement est suffisamment

rapide (support de  $\theta \subset \left[-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}\right]$ , par exemple !) il ne concerne aucun point de  $\mathbf{Z}^n$ .

*Démonstration du lemme 2.1.* Une boîte  $\mathcal{B}$  de  $\mathbf{R}^n$  est un  $n$ -parallélépipède de côtés parallèles aux axes, ou encore  $\mathcal{B} = \{x \in \mathbf{R}^n / (1 \leq i \leq n), a_i \leq x_i \leq b_i\}$ .

Considérant  $E = \{(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \in \mathbf{R}^{2n} / (1 \leq i \leq n), a_i < b_i\}$ , sous-ensemble ouvert de  $\mathbf{R}^{2n}$ , en bijection naturelle avec l'ensemble des boîtes  $\mathcal{B}$  de  $\mathbf{R}^n$ , on peut définir sur  $E$  une topologie évidente et donner un sens non moins évident à l'expression: «  $\mathcal{S}$  est dense dans  $E$  ».

On peut aussi restreindre  $E$  par des conditions supplémentaires comme, par exemple :

$$\text{Max}(b_i - a_i) < 1 \quad \text{ou} \quad \text{Max}_i (|a_i|, |b_i|) < M.$$

Définissons alors l'ensemble  $\mathcal{S} = \{B \in E \mid (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)\}$  est une famille finie de nombres réels linéairement indépendants sur  $\mathbf{Q}$ .

Pour des raisons de dénombrabilité,  $\mathcal{S}$  est dense dans  $E$ .

Soit maintenant  $B \in \mathcal{S}$ ; le théorème de Kronecker (cf. Hardy and Wright, "The theory of numbers", Oxford Press, Théorème 444) dit justement que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un sous-ensemble *non borné* de  $\mathbf{R}$  que nous noterons  $\mathcal{P}_\varepsilon(\mathcal{B})$  et tel que, pour tout  $P \in \mathcal{P}_\varepsilon(\mathcal{B})$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on ait

$$\left[ Pa_i - \frac{1}{2} \right] < \varepsilon \quad \text{et} \quad \left[ Pb_i - \frac{1}{2} \right] < \varepsilon$$

En choisissant  $\varepsilon = \frac{1}{6}$  et le support de  $\theta$  inclus dans  $\left[ -\frac{1}{3}, +\frac{1}{3} \right]^n$ , on se convaincra que

$$\{x \in \mathbf{Z}^n \mid \theta * 1_{P\mathcal{B}}(x) \neq 1_{P\mathcal{B}}(x)\} = \emptyset$$

ce qui constitue le résultat de ce lemme. □

Définissons maintenant, pour  $\Delta > 0$ , l'ensemble

$$T(\Delta) = \{\xi \in \mathbf{A}^r \mid |\xi_\infty| Q(\xi) \leq P^{-d+\Delta} \quad \text{et} \quad Q(\xi) \leq P^\Delta\}$$

où, mais il s'agit d'un rappel!

$$Q(\xi) = \prod_p \text{Max}(1, |\xi_p|_p).$$

Puisque nous avons  $Q(\xi) \geq 1$ , l'inégalité

$$|\xi_\infty| Q(\xi) \leq P^{-d+\Delta}$$

entraîne l'inégalité

$$|\xi_\infty| \leq P^{-d+\Delta}$$

et on obtient donc:  $T(\Delta) \subset M(\Delta)$ . Ces ensembles  $T(\Delta)$  sont bien adaptés à l'hypothèse (H1) comme le montre le lemme suivant.

LEMME 2.2. Avec les notations précédentes et sous l'hypothèse (H1), pour tout  $\xi \in \mathbf{A}^r$  tel que

$$(2.2) \quad \pi(\xi) \notin \pi(T(\Delta)),$$

où  $\pi$  est la projection canonique de  $\mathbf{A}^r$  sur  $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ , on a, pour toute boîte  $\mathcal{B} \in \mathcal{S}$ , pour tout  $P \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'inégalité

$$(2.3) \quad |H(\xi)| \ll P^{n-\Delta\Omega+\varepsilon}.$$

*Démonstration.* Dans une première partie, on réécrit la somme  $H(\xi)$  sous la forme d'une somme trigonométrique  $S(\alpha)$  pour un  $\alpha$  convenable.

Dans une seconde partie on applique l'hypothèse (H1) à cette somme  $S(\alpha)$ .

*1<sup>re</sup> partie.* Nous savons que, par définition, nous avons l'égalité

$$H(\xi) = \sum_{x \in \mathbf{Q}^n} \varphi(x) \psi(\langle \xi, f(x) \rangle).$$

Puisque, pour tout entier premier  $p$ , on a  $\varphi_p = 1_{\mathbf{Z}_p^n}$ , la somme peut se réduire aux  $x \in \mathbf{Z}^n$ .

Puisque  $\mathcal{B} \in \mathcal{S}$  et  $P \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ , l'égalité (2.1) nous permet d'écrire la relation

$$(2.4) \quad H(\xi) = \sum_{x \in P\mathcal{B} \cap \mathbf{Z}^n} \psi_\infty(\langle \xi_\infty, f(x) \rangle) \prod_p \psi_p(\langle \xi_p, f(x) \rangle).$$

Suivant alors une remarque qui a déjà servi dans la démonstration du lemme 1.2, nous pouvons remplacer  $\xi_p$  par la partie polaire de son développement hensélien puisque  $f(x) \in \mathbf{Z}^r$  et que le caractère  $\psi_p$  est trivial sur  $\mathbf{Z}_p^r$ .

Cette partie polaire s'écrit

$$\frac{a_p}{q(\xi_p)} = \left( \frac{a_{p,1}}{q(\xi_p)}, \dots, \frac{a_{p,r}}{q(\xi_p)} \right) \text{ avec les conditions qui la caractérisent}$$

$$0 \leq a_{p,i} < q(\xi_p) \quad (1 \leq i \leq r),$$

$$\text{pgcd}(a_{p,1}, \dots, a_{p,r}, p) = 1,$$

$$q(\xi_p) = \text{Max}_{1 \leq i \leq r} (1, | \xi_{p,i} |_p).$$

On obtient alors l'égalité

$$(2.5) \quad H(\xi) = \sum_{x \in P\mathcal{B} \cap \mathbf{Z}^n} \exp(2i\pi \langle -\xi_\infty + \sum_p \frac{a_p}{q(\xi_p)}, f(x) \rangle).$$

Comme il n'y a qu'un nombre fini d'entiers premiers  $p$ , tels que  $q(\xi_p) > 1$  ou, ce qui est équivalent,  $a_p \neq 0$ , la somme figurant dans l'exposant ci-dessus a un sens.

De plus, pour ce nombre fini d'entiers premiers  $p$ , on a  $q(\xi_p) = p^\alpha$  avec  $\alpha \geq 1$ , donc le p.p.c.m. de différents  $q(\xi_p)$  n'est autre que leur produit.

On obtient ainsi

$$\sum_p \frac{a_p}{q(\xi_p)} = \frac{a(\xi)}{Q(\xi)} \quad (\text{élément de } \mathbf{Q}^r)$$

avec

$$Q(\xi) = \prod_p q(\xi_p)$$

et

$$\text{pgcd}(a_1(\xi), \dots, a_r(\xi), Q(\xi)) = 1 \quad (\text{on ne considère que les } a_i(\xi) \neq 0)$$

$$0 \leq a_i(\xi) < Q(\xi) \quad (1 \leq i \leq r).$$

Il vient donc

$$(2.6) \quad H(\xi) = \sum_{x \in P\mathcal{B} \cap \mathbf{Z}^n} \exp(2i\pi \langle -\xi_\infty + \frac{a(\xi)}{Q(\xi)}, f(x) \rangle).$$

L'égalité (2.6) montre que la somme  $H(\xi)$  est une somme trigonométrique  $S(\alpha)$  pour  $g = 0$  et  $\alpha = \frac{a(\xi)}{Q(\xi)} - \xi_\infty$ .

*2<sup>e</sup> partie.* Soit  $\Delta > 0$ , supposons que  $\alpha$ , trouvé ci-dessus, soit dans le cas ii) de l'hypothèse (H1), c'est-à-dire qu'il existe  $\frac{a}{q} = \left(\frac{a_1}{q}, \dots, \frac{a_r}{q}\right)$  élément de  $\mathbf{Q}^r$  tel que :

$$0 \leq a_i < q \quad (1 \leq i \leq r),$$

$$\text{pgcd}(a_1, \dots, a_r, q) = 1,$$

$$1 \leq q \leq P^\Delta,$$

$$\left| \alpha_i - \frac{a_i}{q} \right| \leq \frac{1}{q} P^{-d+\Delta} \quad (1 \leq i < r).$$

L'ultime condition est équivalente à l'inégalité

$$(2.7) \quad \left| -\xi_\infty + \frac{a(\xi)}{Q(\xi)} - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q} P^{-d+\Delta}.$$

Considérons l'élément  $\zeta$  de  $\mathbf{A}^r$  tel que  $\zeta = \xi - \frac{a(\xi)}{Q(\xi)} + \frac{a}{q}$ .

Puisque, pour tout entier premier  $p$ , on a  $\left(\xi - \frac{a(\xi)}{Q(\xi)}\right)_p \in \mathbf{Z}_p^r$ , on obtient

$$Q(\zeta) = Q\left(\frac{a}{q}\right) = q.$$

En conséquence, l'inégalité (2.7) devient

$$|\zeta_\infty| Q(\zeta) \leq P^{-d+\Delta};$$

comme de plus

$$1 \leq q = Q(\zeta) \leq P^\Delta$$

on constate que  $\zeta \in T(\Delta)$ . Enfin, puisque  $(\zeta - \xi) \in \mathbf{Q}^r$ , on obtient

$$H(\xi) = H(\zeta) \quad \text{et} \quad \pi(\xi) \in \pi(T(\Delta)).$$

Si, maintenant, nous imposons la condition  $\pi(\xi) \notin \pi(T(\Delta))$ , alors, par contraposée,  $\alpha$  n'est pas dans le cas ii) de l'hypothèse (H1); il est donc dans le cas i), d'où l'inégalité

$$|H(\xi)| \ll P^{n-\Delta\Omega+\varepsilon}$$

qui achève cette démonstration. □

Nous avons encore besoin d'un majorant de la mesure de  $T(\Delta)$  qui est l'objet d'un dernier lemme.

LEMME 2.3. *On a l'inégalité*

$$(2.8) \quad \mu(T(\Delta)) \leq P^{-rd+(r+1)\Delta}.$$

*Démonstration.* Dans la démonstration du lemme 2.2, nous avons vu que,  $\xi \in \mathbf{A}^r$  étant donné, on connaît alors  $\xi_\infty \in \mathbf{R}^r$  et  $\frac{a(\xi)}{Q(\xi)} \in \mathbf{Q}^r$ , ce dernier ne dépendant que des  $\xi_p$ , pour tout  $p$  entier premier.

Réciproquement le couple  $\left(\xi_\infty, \frac{a(\xi)}{Q(\xi)}\right)$  définit  $\xi$  modulo  $\prod_p \mathbf{Z}_p^r$ .

Pour  $\frac{a}{q} = \left(\frac{a_1}{q}, \dots, \frac{a_r}{q}\right) \in \mathbf{Q}^r$  et tel que

$$\begin{aligned} 0 \leq a_i < q \quad (1 \leq i \leq r), \\ \text{pgcd}(a_1, \dots, a_r, q) = 1. \end{aligned}$$

On définit

$$T_{a,q}(\Delta) = \left\{ \xi \in \mathbf{A}^r \mid a(\xi) = a \quad \text{et} \quad Q(\xi) = q \right. \\ \left. \text{et} \quad |\xi_\infty| Q(\xi) \leq P^{-d+\Delta} \right\}.$$

Alors on obtient

$$\mu(T_{a,q}(\Delta)) = \mu_\infty(\left\{ x \in \mathbf{R}^r \mid |x| \leq \frac{1}{q} P^{-d+\Delta} \right\}) \prod_p \mu_p(\mathbf{Z}_p^r) = q^{-r} P^{-rd+r\Delta}$$

De plus, on vérifie facilement que pour  $(a, q) \neq (a_1, q_1)$  on a

$$T_{a,q}(\Delta) \cap T_{a_1,q_1}(\Delta) = \emptyset$$

et on a aussi

$$T(\Delta) = \bigcup_{1 \leq q \leq P^\Delta} \bigcup_a T_{a,q}(\Delta).$$

De ces trois dernières relations résulte le calcul suivant

$$\begin{aligned} \mu(T(\Delta)) &= \sum_{1 \leq q \leq P^\Delta} \sum_{\substack{0 \leq a_i < q \\ \text{pgcd}(a_1, \dots, a_r, q) = 1}} q^{-r} P^{-rd+\Delta r} \\ &\leq \sum_{1 \leq q \leq P^\Delta} \sum_{0 \leq a_i < q} q^{-r} P^{-rd+r\Delta} \\ &\leq P^{-rd+(r+1)\Delta}; \end{aligned}$$

le lemme 2.3 est donc démontré. □

Nous pouvons désormais démontrer le principal résultat de ce paragraphe 2.

**THÉORÈME 2.** *Avec les notations précédentes et sous les hypothèses (H1) et (H2), pour toute boîte  $\mathcal{B} \in \mathcal{S}$ , pour tout  $P \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$  sous-ensemble non borné de  $R$ , pour tout  $v \in \mathbf{Z}^r$ , pour tout  $\Delta$  tel que  $0 < \Delta \leq \frac{rd}{r+1}$ , il existe  $\delta_2 > 0$  tel que*

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(M(\Delta))} H(\xi) \psi(\langle \xi, -v \rangle) d\xi = O(P^{n-rd-\delta_2}).$$

*Démonstration.* Puisque  $T(\Delta) \subset M(\Delta)$ , il suffit de montrer que

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(T(\Delta))} |H(\xi)| d\xi = O(P^{n-rd-\delta_2}).$$

Choisissons  $\Delta$  tel que  $0 < \Delta \leq \frac{rd}{r+1}$ , puis définissons une suite

$$\Delta_0 = \Delta < \Delta_1 < \dots < \Delta_N = \frac{rd}{r+1}$$

obtenue en fixant  $\delta > 0$  tel que

$$(2.9) \quad \Omega - r - 1 > 2\delta\Delta^{-1}$$

et

$$(2.10) \quad \frac{1}{2}\delta > (r+1)(\Delta_{t+1} - \Delta_t) \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq N-1.$$

Une telle suite existe puisque, en vertu de l'hypothèse (H2) on a  $\Omega - r - 1 > 0$ , et  $\delta$  est d'autant plus petit que  $\Delta$  est lui-même petit. Puis,  $\delta$  étant choisi en fonction de l'inégalité (2.9), on peut définir  $(\Delta_{t+1} - \Delta_t)$  à partir de l'inégalité (2.10) et obtenir enfin la valeur de  $N$ . Il est important de remarquer que  $\delta$  et  $N$  sont indépendants de  $P$ .

La raison du choix de  $\Delta_N = \frac{rd}{r+1}$  vient du calcul suivant et du lemme 2.2.

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(T(\Delta_N))} |H(\xi)| d\xi \ll \int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} P^{n - \Delta_N \Omega + \varepsilon} d\xi \ll P^{n - \frac{rd}{r+1} \Omega + \varepsilon}$$

Mais l'inégalité (2.9) donne

$$\frac{\Omega}{r+1} > 1 + \frac{2\delta}{(r+1)\Delta}$$

donc

$$\begin{aligned} n - \frac{rd}{r+1} \Omega + \varepsilon &< n - rd - 2\delta \frac{\Delta_N}{\Delta} + \varepsilon \\ &< n - rd - 2\delta + \varepsilon \end{aligned}$$

d'où l'inégalité

$$(2.11) \quad \int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(T(\Delta_N))} |H(\xi)| d\xi \ll P^{n - rd - 2\delta + \varepsilon}$$

Par ailleurs, on calcule ce qui suit, pour chaque  $t$  tel que  $0 \leq t \leq N-1$ , et en utilisant les lemmes 2.2 et 2.3



$$\int_{\pi(T(\Delta_{t+1})) - \pi(T(\Delta_t))} |H(\xi)| d\xi \ll \int_{\pi(T(\Delta_{t+1}))} P^{n - \Delta_t \Omega + \varepsilon} d\xi$$

$$\ll P^{-rd + (r+1)\Delta_{t+1} + n - \Delta_t \Omega + \varepsilon} \ll P^{n - rd + (r+1)(\Delta_{t+1} - \Delta_t) - \Delta_t(\Omega - r - 1) + \varepsilon}$$

Mais l'inégalité (2.10) aidant ainsi que l'inégalité (2.9) qui entraîne

$$(\Omega - r - 1) \Delta_t > (\Omega - r - 1) \Delta > 2\delta.$$

On obtient l'inégalité

$$(2.12) \quad \int_{\pi(T(\Delta_{t+1})) - \pi(T(\Delta_t))} |H(\xi)| d\xi \ll P^{n - rd - \frac{3}{2}\delta + \varepsilon}$$

En réunissant l'inégalité (2.11) et les inégalités (2.12) dont le nombre  $N$  ne dépend pas de  $P$ , il vient

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(T(\Delta))} |H(\xi)| d\xi \ll P^{n - rd - \frac{3}{2}\delta + \varepsilon}$$

On peut enfin choisir  $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$  et  $\delta_2 = \delta$  pour achever la démonstration du théorème 2. □

*Remarque.* La démonstration du théorème 2 est classique: voir, par exemple, Birch lemme 4.4.

*Remarque.* Pour de grandes valeurs  $\Delta$ , la restriction de la projection  $\pi$  à l'ensemble  $T(\Delta)$  n'est pas injective.

Ceci ne présente aucun inconvénient pour la démonstration du théorème 2, puisque l'inégalité

$$\mu(T(\Delta)) \geq \mu[\pi(T(\Delta))]$$

est dans le bon sens.

Au contraire, au paragraphe 1, pour étudier l'intégrale  $\int_{\pi(M(\Delta))} H(\xi) d\xi$ , il est indispensable d'avoir l'égalité

$$\mu(M(\Delta)) = \mu[\pi(M(\Delta))]$$

qui est obtenue si la projection  $\pi$  est injective sur  $M(\Delta)$  et donc pour  $\Delta < \frac{d}{3}$  en vertu du lemme 1.7.