B) Notations et Hypothèses principales

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

On obtient ainsi:

1°) Une présentation unifiée des arcs majeurs.

2°) Une expression globale pour la série singulière et l'intégrale singulière qui met en évidence la transformée de Gauss globale F^* (selon la notation d'Igusa, cf. bibliographie) associée à une fonction de Schwarz-Bruhat d'un type précis.

Remarque. Un résultat analogue pour d'autres fonctions de Schwarz-Bruhat est une des espérances que ce travail peut susciter.

3°) L'exposé d'une méthode suffisamment générale comme le montrent les exemples du paragraphe 5 et dont les hypothèses initiales sont nettement dégagées.

4°) La démonstration au lemme 1-6 d'une majoration générale d'une somme de modules d'intégrales oscillantes.

B) Notations et Hypothèses principales

Soient $f = (f_1, ..., f_r)$ r formes de degré $d \geqslant 2$, en n variables $x = (x_1, ..., x_n)$ avec $r \leqslant n$ et à coefficients entiers.

Soit g un polynôme quelconque de degré $< d$ et à coefficients entiers, en les variables x.

Remarque. Tout ce travail pourrait se faire sans mentionner un tel polynôme g, sur ce point on pourra lire la remarque finale du paragraphe 1 et le paragraphe 5A.

Soit $\mathscr{B}$ une boîte de dimension n (parallélépipède de côtés parallèles aux axes de $\mathbf{R}^n$ ou encore: $\{x \in \mathbf{R}^n \mid 1 \leqslant i \leqslant n, a_i \leqslant x \leqslant b_i\}$) et de côtés au plus égaux à 1 (i.e.: $1 \leqslant i \leqslant n, b_i - a_i < 1$).

Soit $P \in \mathbf{R}_+$ et destiné à être très grand.

Soit $\varepsilon > 0$ et destiné à être très petit.

Soit $\nu \in \mathbf{Z}^r$.

Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_r) \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^r$ ou encore: $1 \leqslant i \leqslant r, 0 \leqslant \alpha_i < 1$.

Soit la somme trigonométrique

$$S(\alpha) = \sum_{x \in P\mathscr{B} \cap \mathbf{Z}^n} \exp\left[2i\pi\left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j f_j(x) + g(x)\right)\right]$$

On définit les hypothèses suivantes concernant les sommes trigonométriques $S(\alpha)$ et donc le système f:

(H1) Il existe une constante $\Omega > 0$ telle que pour tout $\Delta > 0$, pour tout polynôme g de degré $< d$, pour toute boîte $\mathscr{B}$ incluse dans un domaine borné de $\mathbf{R}^n$, pour tout $P > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $\alpha \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^r$, on ait *l'alternative suivante*:

ou bien i) $| S(\alpha) | \ll P^{n - \Delta\Omega + \varepsilon}$

la constante impliquée dans le symbole « $\ll$ » dépendant seulement des coefficients des formes f_i, du domaine borné dans lequel la boîte $\mathscr{B}$ est choisie, de $\varepsilon > 0$ et, à cause de cette constante, l'inégalité étant triviale pour P petit;

ou bien ii) Il existe des approximations rationnelles $\frac{a}{q} = \left(\frac{a_1}{q}, \dots, \frac{a_r}{q}\right)$ de $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ telles que

$$
\begin{aligned}
& pgcd(a_1, \dots, a_r, q) = 1 \text{ (on ne considère que les } a_i \neq 0), \\
& 1 \leqslant q \leqslant P^{\Delta}, \\
& 0 \leqslant a_i < q, \\
& (1 \leqslant i \leqslant r) \, | q \alpha_i - a_i | \leqslant P^{-d+\Delta}.
\end{aligned}
$$

(H2) Ω étant la constante définie dans l'hypothèse (H1), on a

$$\Omega > r + 1 .$$

Remarques.

a) Comme annoncé précédemment, l'hypothèse (H1) peut faire frémir. En plus romancé, elle énonce une propriété fréquemment rencontrée ou désirée chez les sommes trigonométriques: ou bien on dispose d'une bonne majoration du module des sommes trigonométriques étudiées (ici les sommes $S(\alpha)$), ou bien le coefficient principal de l'exposant (ici la variable α) possède de bonnes approximations rationnelles.

b) On peut remarquer qu'en raison du théorème classique d'approximation rationnelle simultanée de r nombres réels (cf. Hardy and Wright, 4[e] édition, paragraphe 11.12) le cas ii), et donc l'hypothèse (H1), sont triviaux pour $\Delta \geqslant \frac{r}{r+1} d$.

c) On a préféré distinguer les hypothèses (H1) et (H2) car elles jouent des rôles très distincts dans les démonstrations de ce travail.

d) Pour une justification de ces hypothèses, on doit voir le paragraphe 5A.

e) L'ensemble des $\alpha \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^r$, qui satisfont aux conditions de bonne approximation rationnelle énoncées dans ii), constitue ce qu'on appelle classiquement les *arcs majeurs*. L'origine de ce nom se comprend en observant le cas $r = 1$.

L'ensemble complémentaire du précédent dans $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^r$ constitue les *arcs mineurs*. Dans la plupart des applications de la méthode du cercle, dont le nom se comprend soudain mieux (prendre encore le cas $r = 1$ et se demander ce qu'est $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$), le traitement de ces arcs mineurs est la partie la plus délicate car il s'agit d'obtenir, sur eux, une « bonne » majoration du module des sommes trigonométriques étudiées.

On comprend donc que l'hypothèse (H1) avec le cas i) escamote complètement cette difficulté qui, bien entendu, réapparaît selon un Principe de conservation bien connu, dans le problème, déjà évoqué, consistant à trouver une propriété du système f qui entraîne l'hypothèse (H1) (et aussi (H2) d'ailleurs!). Pour cet aspect qui, cela a déjà été dit, sort du cadre de ce travail mais lui est immédiatement associé, il faut lire le paragraphe 5.

Si le lecteur a eu la patience de lire ce qui précède, il sait que le but de ce travail est de montrer que les systèmes f, dont les sommes trigonométriques $\mathcal{S}(\alpha)$ associées répondent aux hypothèses (H1) et (H2), observent le principe de Hasse fin.

Cependant, comme la méthode du cercle se prête très bien à l'étude du système diophantien $f = \nu$ (et pas seulement $f = 0$) qui paraît même mieux adapté à la nature profonde de celle là, il vaut mieux énoncer deux nouvelles hypothèses pour le cas général dont la restriction au cas $\nu = 0$ rappellera irrésistiblement les conditions du Principe de Hasse fin.

(H3) Pour un élément ν de $\mathbf{Z}^r$, le système $f = \nu$ admet une solution *non singulière* dans $\mathbf{Z}_p^n$, pour tout entier premier p.

(H4) Le système $f = 0$ admet une solution non singulière dans $\mathbf{R}^n$.

Remarque. Si $\nu \neq 0$ l'hypothèse (H4) ne dit pas que la variété réelle

$$V(\nu) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = \nu\}$$

admet un point réel non singulier mais qu'elle admet un point *à l'infini* réel non singulier; pour une justification de cette « anomalie », voir le paragraphe 5C.

Le lecteur sait également que la présentation adoptée dans ce travail utilise les adèles. Il est temps d'en parler.