

Objektyp: **ReferenceList**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1984)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **18.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

to make (\*) correct. We note that this is equivalent to choosing  $C_l$  for  $L_n + 1 \leq l \leq L_{n+1}$ . This completes the construction.

To verify that  $(Q_k)$  is dense, let  $E$  be an entire function,  $N > 0$  and  $\varepsilon > 0$ . Choose  $n$  so that

$$\text{i) } n > N,$$

$$\text{ii) } |h_n(z) - E(z)| \leq \frac{1}{3} \varepsilon \quad \text{for } |z| \leq N,$$

$$\text{iii) } \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} \varepsilon, \quad \text{and}$$

$$\text{iv) } |(I^{L_n} f)(z)| \leq \frac{1}{3} \varepsilon \quad \text{for } |z| \leq N.$$

$$\text{Then } |Q_{L_n}(z) - E(z)| \leq \varepsilon \quad \text{for all } |z| \leq N.$$

We conclude with a result communicated to us by I. N. Baker, namely that there is no entire function  $f$  such that the sequence of its compositional iterates  $f^{[n]}$  spans a dense set. If  $f$  is linear, then the closed span of its iterates contains only linear functions. (That is, the only univalent entire functions are the linear ones. See [BUR], §11.19, p. 370 and the Notes on p. 407 for several proofs.) If  $f$  is not linear, then there exist  $z_1, z_2$  with  $z_1 \neq z_2$  but  $f(z_1) = f(z_2)$ . This equality also holds for all linear combinations of iterates, so the closed span of the iterates lies in the proper closed subspace  $\{g : g(z_1) = g(z_2)\}$ . Finally, we remark that if  $f$  is universal in sense (b) then the pair  $f(z), z - 1$  is universal under composition.

#### REFERENCES

- [BIR] BIRKHOFF, G. D. Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières. *C. R. Acad. Sci. Paris* 189 (1929), 473-475.
- [BLR] BLAIR, Charles and Lee RUBEL. A universal entire function. *Amer. Math. Monthly* 90 (1983), 331-332—see also Addendum, to appear December 1983.
- [BUR] BURCKEL, Robert G. *An Introduction to Classical Complex Analysis*. Vol. I, Academic Press, New York and San Francisco, 1979.
- [GRM] MACLANE, Gerald. Sequences of derivatives and normal families. *J. d'Analyse Math.* 2 (1952), 72-87.
- [LUH, I] LUH, Wolfgang. On universal functions. *Fourier Analysis and Approximation Theory* (Proc. Colloq. Budapest, 1976), Vol. II, 503-511, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 19, North-Holland, Amsterdam 1978.
- [LUH, II] ———. Universalfunktionen in einfach zusammenhängenden Gebieten. *Aequationes Math.* 19 (1979), 183-193.

- [SAZ] SAKS, S. and A. ZYMUND. *Analytic functions*. 2nd ed., Polish Scientific Publishers 1965.
- [SEW] SEIDEL, W. P. and J. L. WALSH. On approximation by Euclidean and non-Euclidean translates of an analytic function. *Bull. Amer. Math. Soc.* 47 (1941), 916-920.

(Reçu le 4 octobre 1983)

Charles Blair

Department of Business Administration  
University of Illinois  
Urbana, Illinois 61801

Lee Rubel

Department of Mathematics  
University of Illinois  
Urbana, Illinois 61801