

Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1984)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

LE PROBLÈME DE J. MILNOR SUR LE NOMBRE GORDIEN DES NOEUDS ALGÈBRIQUES ¹⁾

par Michel BOILEAU et Claude WEBER

INTRODUCTION

Cet article tente de faire le point sur deux conjectures célèbres et toujours ouvertes, celles dites de R. Thom et J. Milnor. Elles sont attirantes, car elles relient de façon spectaculaire la géométrie algébrique et la topologie en petites dimensions.

En ce qui concerne la topologie, nous avons particulièrement mis l'accent sur la théorie des entrelacs, plutôt que sur la théorie des nœuds (connexes). Il y a à cela au moins deux raisons : tout d'abord ce sont les entrelacs qui sont vraiment liés au sujet et d'autre part, selon le précepte de L. Siebenmann, la théorie des entrelacs est indissociable de celle des nœuds. Ceci entraîne parfois quelques complications.

Les trois premiers paragraphes de cet article sont essentiellement de la mise en place de choses connues.

Au § 4 nous donnons une démonstration simple du théorème de H. Pinkham qui majore le nombre gordien des entrelacs algébriques. Cette démonstration a été obtenue en collaboration avec D. Bennequin.

Au § 5 nous donnons une preuve des inégalités de H. Wendt dans le cas des entrelacs et discutons certaines minoration classiques du nombre gordien. Pour cela nous introduisons le « grand genre » de Murasugi, concept commode pour minorer le nombre gordien d'un entrelacs.

Au § 6 nous généralisons un peu les théorèmes de A. Tristram sur les signatures des entrelacs. Ces théorèmes permettent de trouver des bornes pour la conjecture de R. Thom qui sont exactement celles données par V. Rohlin d'une part et par W. C. Hsiang et R. Szczarba d'autre part, en utilisant le théorème de la G -signature d'Atiyah-Singer. Qu'une telle voie soit théoriquement possible était connu de T. Matumoto et O. Viro. Voir aussi V. A. Nezhinskii [Ne] et S. A. Popov [Po].

¹⁾ Cet article a déjà paru dans *Nœuds, tresses et singularités*, Monographie de l'Enseignement Mathématique N° 31, Genève 1983, p. 49-98.

Les détails de plusieurs démonstrations se trouvent dans le manuscrit multi-copié [BW], du même titre que cet article.

Nous tenons à remercier Daniel Bennequin, Lê Dung Trang et Françoise Michel des nombreuses discussions que nous avons eues sur les sujets traités ici. L'enthousiasme de Lê pour la conjecture de J. Milnor est très contagieux!

Le plan de cet article est le suivant :

- § 1. Genre des courbes planes et conjecture de R. Thom.
- § 2. Genres de Murasugi et de Seifert des entrelacs.
- § 3. Nombre gordien des entrelacs.
- § 4. Le problème de Milnor.
- § 5. Relations entre le nombre gordien et d'autres invariants de la théorie des entrelacs.
- § 6. Signatures.
- § 7. Quelques problèmes liés au nombre gordien.

§ 1. GENRE DES COURBES PLANES ET CONJECTURE DE R. THOM

Soit C une courbe algébrique dans \mathbf{CP}^2 , irréductible. Il existe donc un polynôme homogène $F(X, Y, Z)$ irréductible, tel que C est constituée par les zéros de F . Par définition le degré de C est le degré du polynôme F .

Supposons C lisse. Alors, du point de vue différentiable, C est une surface close, connexe, orientée. Elle a un genre topologique g et une version du théorème de Riemann-Roch (connue aussi sous le nom de théorème de Plücker) affirme que: $2g = (d-1)(d-2)$.

Références: W. Fulton [Fu]; R. Walker [Wak].

En fait ce théorème se trouve dans quasiment tous les livres sur les courbes planes.

Par le théorème de Bezout, le degré d peut être interprété topologiquement en disant que la classe fondamentale $[C] \in H_2(C; \mathbf{Z})$ est homologue dans \mathbf{CP}^2 à d fois la classe représentée par le générateur canonique $\mathbf{CP}^1 \hookrightarrow \mathbf{CP}^2$. On a toujours $d > 0$. Ceci justifie la définition qui suit.

Soit F une surface topologique dans \mathbf{CP}^2 . Supposons F close, connexe, orientée. On dira que F est de degré d si la classe fondamentale $[F]$ est homologue dans \mathbf{CP}^2 à d fois $[\mathbf{CP}^1]$. Quitte à changer l'orientation de F , nous supposons toujours $d \geq 0$.

Ceci étant précisé, nous pouvons énoncer la