

## §3. Calcul de (K)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1984)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.04.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

### § 3. CALCUL DE $\chi(K)$

Soit  $K$  un corps de fonctions complexes et soit  $\bar{K}$  une clôture algébrique de  $K$ . On choisit une variété algébrique lisse  $X$  avec corps des fonctions  $C(X) \simeq K$ . On veut exprimer  $\chi(K) = \text{Hom}_c(\text{Gal}(\bar{K}/K), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  en terme d'invariants de  $X$ .

Dans ce qui suit les variétés algébriques complexes, naturellement munies de la topologie de Zariski, seront parfois considérées d'un point de vue analytique et munies de la topologie transcendante; notamment lorsque l'on parlera de leur homologie ou cohomologie. (Sauf indication contraire ces dernières seront à coefficients entiers.) On utilisera que l'on peut trianguler les variétés algébriques complexes [10].

Notons  $\mathcal{V}(X)$  l'ensemble des sous-variétés algébriques fermées pures de codimension (complexe) 1 de  $X$ , que l'on ordonne par l'inclusion. Si  $D \in \mathcal{V}(X)$ , le groupe  $H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  s'identifie au groupe  $\text{Hom}(H_1(X-D), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ , et si  $D_1, D_2 \in \mathcal{V}(X)$ , avec  $D_1 \subset D_2$ , l'inclusion  $j: X-D_2 \hookrightarrow X-D_1$  induit un homomorphisme  $j^*: H^1(X-D_1, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(X-D_2, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  qui est injectif. (En effet, le complément de  $X-D_2$  dans  $X-D_1$  étant une sous-variété de codimension réelle 2,  $j$  induit une surjection du groupe fondamental de  $X-D_2$  sur celui de  $X-D_1$ , et donc de  $H_1(X-D_2)$  sur  $H_1(X-D_1)$ .) L'ensemble  $\{H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})\}_{D \in \mathcal{V}(X)}$  forme avec ces homomorphismes un système inductif.

On peut maintenant énoncer un premier résultat sur  $\chi(K)$ .

THÉORÈME 3.1. *Soit  $K$  un corps de fonctions complexes et soit  $X$  une variété algébrique lisse avec  $C(X) \simeq K$ . On a un isomorphisme*

$$\chi(K) \simeq \varinjlim_{D \in \mathcal{V}(X)} H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

qui ne dépend que du choix de l'isomorphisme  $C(X) \simeq K$ .

*Préliminaires à la démonstration.* Soient  $X$  une variété algébrique complexe lisse et  $L$  une extension finie de  $K := C(X)$ . Notons  $(Y, \nu)$  la normalisation de  $X$  dans  $L$ . On dira qu'une sous-variété fermée  $\Delta$  de  $X$  contient la ramification de  $\nu$  si — pour la topologie transcendante —  $\nu$  est un revêtement non ramifié à  $[L: K]$  feuillets au-dessus de  $W := X - \Delta$  et on notera  $\text{Aut}_W^{\text{top}}(Z)$  ou  $\text{Aut}_W(Z)$  le groupe des automorphismes de ce revêtement, où on a posé  $Z = Y - \nu^{-1}(\Delta)$ . D'après [18, Chap. II, n° 5.3], on peut trouver une variété  $\Delta \in \mathcal{V}(X)$  contenant la ramification de  $\nu$ . (En fait, par le théorème

de pureté de Zariski [20], si la variété de ramification est non vide, elle est pure de codimension 1.)

On a vu au corollaire 2.3 que  $\text{Aut}(L/K) \simeq \text{Aut}_X^{\text{alg}}(Y)$ . Ces groupes sont reliés au groupe  $\text{Aut}_W^{\text{top}}(Z)$  de la manière suivante :

LEMME 3.2. Soient  $(Y, \nu)$  la normalisation d'une variété lisse  $X$  dans une extension finie  $L$  de  $K := \mathbb{C}(X)$  et  $\Delta \in \mathcal{V}(X)$  une sous-variété contenant la ramification de  $\nu$ . Posons  $W = X - \Delta$  et  $Z = Y - \nu^{-1}(\Delta)$ .

- (i) La restriction des automorphismes à  $Z$  est une injection  $\text{Aut}_X^{\text{alg}}(Y) \hookrightarrow \text{Aut}_W^{\text{top}}(Z)$ .
- (ii) Si l'extension  $L/K$  est galoisienne, cette injection est un isomorphisme et le revêtement  $\nu: Z \rightarrow W$  est galoisien.
- (iii) Si l'extension  $L/K$  est abélienne, on a un isomorphisme canonique  $\text{Gal}(L/K) = \text{Aut}_W^{\text{top}}(Z)$  donné par (ii) et le corollaire 2.3.

*Démonstration.*

- (i) Evident.
- (ii) On compare les ordres de ces groupes finis:  $|\text{Aut}_W^{\text{top}}(Z)|$  est inférieur ou égal au nombre de feuillets du revêtement qui est  $[L:K]$ . Comme d'autre part  $[L:K] = |\text{Gal}(L/K)| = |\text{Aut}_X^{\text{alg}}(Y)| \leq |\text{Aut}_W^{\text{top}}(Z)|$ , on a égalité et le revêtement  $\nu$  est galoisien.
- (iii) Si l'on choisit deux  $K$ -isomorphismes  $\mathbb{C}(Y) \simeq L$ , les applications induites  $\text{Gal}(L/K) \simeq \text{Aut}_W^{\text{top}}(Z)$  diffèrent par un automorphisme intérieur.  $\square$

On rappelle encore un théorème plus profond dont on aura besoin (voir [8, App. B, th. 3.2; 15, th. 5.1; 17]).

THÉORÈME D'EXISTENCE DE RIEMANN GÉNÉRALISÉ. Soit  $W$  une variété algébrique complexe normale et soit  $p: Z \rightarrow W$  un revêtement non ramifié fini pour la topologie transcendante. Alors on peut munir  $Z$  d'une structure de variété algébrique normale de sorte que  $p$  soit un morphisme algébrique fini.

*Démonstration du théorème 3.1.* On fixe un isomorphisme permettant d'identifier  $\mathbb{C}(X)$  à  $K$ .

1) *Construction de l'isomorphisme:* On veut définir une application

$$F: \chi(K) \rightarrow \lim_{\rightarrow D \in \mathcal{V}(X)} H^1(X - D, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Soit  $\phi \in \chi(K)$  un homomorphisme de  $\text{Gal}(\bar{K}/K)$  dans  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  d'ordre fini  $m$ .

Notons  $(Y, v)$  la normalisation de  $X$  dans  $L := \bar{K}^{\text{Ker } \varphi}$  et également  $\varphi: \text{Gal}(L/K) \hookrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  l'homomorphisme induit par  $\varphi$ . Soit  $\Delta \in \mathcal{V}(X)$  contenant la ramification de  $v$  et posons  $W = X - \Delta$ ,  $Z = Y - v^{-1}(\Delta)$ . Comme  $L/K$  est une extension abélienne (cyclique de degré  $m$ ), par le lemme 3.2, le revêtement  $v: Z \rightarrow W$  est galoisien et on a l'identification  $\text{Aut}_W(Z) = \text{Gal}(L/K)$ .

Comme  $X$  et  $Y$ ,  $W = X - \Delta$  et  $Z = Y - v^{-1}(\Delta)$  sont algébriquement irréductibles et donc connexes pour la topologie transcendante [18, Chap. VII, § 2]. La suite exacte usuelle

$$(6) \quad 1 \rightarrow \pi_1(Z) \xrightarrow{v^*} \pi_1(W) \rightarrow \text{Aut}_W(Z) \rightarrow 0$$

donne une suite exacte en homologie

$$(7) \quad H_1(Z) \xrightarrow{v^*} H_1(W) \rightarrow \text{Aut}_W(Z) \rightarrow 0.$$

Avec l'identification  $\text{Aut}_W(Z) = \text{Gal}(L/K)$  du lemme 3.2, on obtient une surjection naturelle

$$(8) \quad \pi: H_1(W) \twoheadrightarrow \text{Gal}(L/K).$$

En notant  $\pi^*: \text{Hom}(\text{Gal}(L/K), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow \text{Hom}(H_1(W), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  l'application duale, on peut considérer  $\pi^*(\varphi) \in \text{Hom}(H_1(W), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = H^1(W, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  et définir  $F(\varphi)$  comme son image dans  $\lim_{D \in \mathcal{V}(X)} H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ .

Il faut vérifier que  $F(\varphi)$  est indépendant du choix de  $\Delta$ . Soit donc  $\Delta' \in \mathcal{V}(X)$  une autre sous-variété de  $X$  contenant la ramification de  $v$ . Quitte à remplacer  $\Delta'$  par  $\Delta' \cup \Delta$ , on peut supposer  $\Delta \subset \Delta'$ . On définit comme plus haut  $W' = X - \Delta'$  et  $\pi': H_1(W') \twoheadrightarrow \text{Gal}(L/K)$ . Par fonctorialité de la suite exacte (6) [4, p. 12], le carré

$$\begin{array}{ccc} H_1(W') & \xrightarrow{\pi'} & \text{Gal}(L/K) \\ \downarrow & & \parallel \\ H_1(W) & \xrightarrow{\pi} & \text{Gal}(L/K) \end{array}$$

est commutatif. Ceci montre que  $\pi'^*(\varphi)$  et  $\pi^*(\varphi)$  ont la même image dans  $\lim_{D \in \mathcal{V}(X)} H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ .

*Remarque.* On obtient le même élément  $F(\varphi)$  si on fait cette construction à partir de n'importe quelle extension abélienne finie  $L'$  de  $K$  contenant  $L = \bar{K}^{\text{Ker } \varphi}$ .

En effet, si  $(Y', \mu)$  est la normalisation de  $Y$  dans  $L'$  et si  $v' = v \circ \mu$ , alors  $(Y', v')$  est la normalisation de  $X$  dans  $L'$ . Quitte à agrandir  $\Delta$ , on peut supposer qu'il contient également la ramification de  $v'$  et définir

$Z' = Y' - v'^{-1}(\Delta)$ . La compatibilité évidente entre la suite exacte (7) et celle correspondant à  $v'$  s'exprime par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H_1(Z') & \xrightarrow{v'_*} & H_1(W) & \rightarrow & \text{Aut}_W(Z') \\ \mu_* \downarrow & & \parallel & & \downarrow \mu_* \\ H_1(Z) & \xrightarrow{v_*} & H_1(W) & \rightarrow & \text{Aut}_W(Z) \end{array}$$

où l'on vérifie que l'application  $\mu_*$  de droite est la projection sur  $Z$  des automorphismes de  $Z'$ .

En utilisant le corollaire 2.4, on en déduit la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc} H_1(W) & \xrightarrow{\pi'} & \text{Gal}(L'/K) \\ \parallel & & \downarrow \\ H_1(W) & \xrightarrow{\pi} & \text{Gal}(L/K), \end{array}$$

d'où  $\pi'^*(\varphi) = \pi^*(\varphi)$ .

2)  $F$  est un homomorphisme: Soient  $\varphi_1, \varphi_2 \in \chi(K)$ . Notons  $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$  et considérons le corps fixe  $L$  de  $\bar{K}$  par  $\text{Ker}\varphi_1 \cap \text{Ker}\varphi_2$ , qui est une extension abélienne finie de  $K$  contenant les corps fixes de  $\bar{K}$  par  $\text{Ker}\varphi_1$ ,  $\text{Ker}\varphi_2$  et  $\text{Ker}\varphi_3$ . Par la remarque qui précède, on peut calculer les images par  $F$  de  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$  en utilisant l'extension  $L/K$ . On construit donc à partir de  $L$  la variété  $W$  et l'homomorphisme  $\pi: H_1(W) \rightarrow \text{Gal}(L/K)$  de (8).

Dans  $\text{Hom}(\text{Gal}(L/K), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ , on a toujours que  $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$ , puisque l'inclusion  $L \subset \bar{K}$  induit une injection  $\text{Hom}(\text{Gal}(L/K), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \hookrightarrow \chi(K)$ . Ainsi  $\pi^*(\varphi_3) = \pi^*(\varphi_1) + \pi^*(\varphi_2)$  dans  $H^1(W, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  et  $F(\varphi_3) = F(\varphi_1) + F(\varphi_2)$  dans  $\lim_{\rightarrow D \in \mathcal{V}(X)} H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ .

3)  $F$  est injective: Soit  $\varphi \in \chi(K)$  tel que  $F(\varphi) = 0$ . Comme précédemment, on construit un homomorphisme  $\pi: H_1(W) \rightarrow \text{Gal}(L/K)$ . Par définition,  $F(\varphi)$  est l'image de  $\pi^*(\varphi)$  par l'injection  $H^1(W, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \hookrightarrow \lim_{\rightarrow D \in \mathcal{V}(X)} H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ .

Si donc  $F(\varphi) = 0$ , on a  $\pi^*(\varphi) = 0$  et comme  $\pi$  est surjective,  $\varphi = 0$ .

4)  $F$  est surjective: Soit  $\psi \in \lim_{\rightarrow D \in \mathcal{V}(X)} H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ . Choisissons  $\Delta \in \mathcal{V}(X)$  assez grand et, pour  $W := X - \Delta$ , un représentant  $\psi' \in H^1(W, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  de  $\psi$ . L'ordre  $m$  de  $\psi': H_1(W) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  est fini, car  $H_1(W)$  est de génération finie. En effet, d'après [13],  $X$  se plonge comme ouvert dans une variété  $\tilde{X}$

complète, c'est-à-dire compacte pour la topologie transcendante. En triangulant, on peut trouver un voisinage tubulaire  $U$  du fermé  $\Sigma := (\tilde{X} - X) \cup \bar{\Delta}$ , de sorte que  $W = X - \Delta = \tilde{X} - \Sigma$  se rétracte par déformations sur  $\tilde{X} - U$ . Par compacité, l'homologie de  $\tilde{X} - U$  (et donc celle de  $W$ ) est de type fini [5, Chap. VIII, cor. 1.4].

Soit  $x \in W$ . Notons  $\rho: \pi_1(W, x) \rightarrow H_1(W)$  la projection canonique et  $N$  le sous-groupe  $\text{Ker}(\psi' \circ \rho)$  invariant d'indice  $m$  dans  $\pi_1(W, x)$ . A  $N$  correspond un revêtement topologique galoisien non ramifié à  $m$  feuillets  $p: Z \rightarrow W$ , tel que  $p_*\pi_1(Z, y) = N$  pour tout  $y \in p^{-1}(x)$ . Remarquons que le groupe  $\text{Aut}_W(Z) \simeq \pi_1(W, x)/p_*\pi_1(Z, y)$  est abélien, car par passage au quotient  $\psi' \circ \rho$  devient une injection  $\psi'': \text{Aut}_W(Z) \hookrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ .

C'est maintenant qu'on utilise le théorème d'existence de Riemann généralisé pour savoir qu'on peut munir  $Z$  d'une structure de variété algébrique normale de sorte que  $p$  soit un morphisme algébrique fini. Notons  $L = \mathbf{C}(Z)$ . La paire  $(Z, p)$  est la normalisation de  $W$  dans  $L$ , de sorte que, si  $(Y, v)$  est celle de  $X$  dans  $L$ , par unicité, on peut supposer  $Z \subset Y$  et  $p = v|_Z$ .

On veut montrer que l'extension  $L/K$  est galoisienne. Pour cela, on choisit une extension galoisienne  $L'/K$  contenant  $L$  et on considère la normalisation  $(Y', \mu)$  de  $Y$  dans  $L'$ . Quitte à agrandir  $\Delta$ , on peut supposer qu'il contient la ramification de  $v' := v \circ \mu$ . Notons  $Z' = Y' - v'^{-1}(\Delta)$ . En utilisant les suites (6) correspondant à  $v, v'$  et  $\mu$ , on obtient la suite exacte

$$1 \rightarrow \text{Aut}_Z(Z') \rightarrow \text{Aut}_W(Z') \rightarrow \text{Aut}_W(Z) \rightarrow 1.$$

Par l'isomorphisme du lemme 3.2, l'inclusion de  $\text{Aut}_Z(Z')$  dans  $\text{Aut}_W(Z')$  correspond à celle de  $\text{Gal}(L'/L)$  dans  $\text{Gal}(L'/K)$ , ce qui montre que ce dernier sous-groupe est invariant et que l'extension  $L/K$  est galoisienne.

Soit  $L_0$  l'unique sous-corps de  $\bar{K}$  isomorphe à  $L$ . On a les identifications  $\text{Gal}(L_0/K) = \text{Gal}(L/K) = \text{Aut}_W(Z)$ , la première étant induite par n'importe quel isomorphisme  $L_0 \simeq L$ , mais n'en dépendant pas puisque les groupes sont abéliens. On peut donc définir  $\varphi \in \chi(K)$  comme la composition de la projection  $\text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \text{Gal}(L_0/K)$  suivie de  $\psi'': \text{Aut}_W(Z) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ . Par construction,  $F(\varphi) = \psi$ . □

#### § 4. INTERPRÉTATION DE $\chi(K)$

Soit  $K$  un corps de fonctions complexes et soit  $X$  une variété algébrique lisse avec corps des fonctions  $\mathbf{C}(X) \simeq K$ . A partir du calcul du § 3, on interprète  $\chi(K)$  en terme d'invariants usuels de  $X$ : le groupe des diviseurs