

# inégalités de grand crible et leurs applications

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1984)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## SUR UNE INÉGALITÉ DE MONTGOMERY-VAUGHAN

par E. PREISSMANN

### LES INÉGALITÉS DE GRAND CRIBLE ET LEURS APPLICATIONS

Le grand crible est une idée relativement récente, permettant par exemple de démontrer le théorème de Bombieri-Vinogradov [2] ou de montrer que pour  $n$  assez grand on a  $2n = p + P_k$  ( $p$  étant premier et  $P_k$  produit de  $k$  facteurs premiers au plus). Barban [1] a trouvé  $k = 4$ , et Chen (voir [3])  $k = 2$ .

Notons  $e(\theta) = e^{2i\pi\theta}$  et soient  $a_{M+1}, a_{M+2}, \dots, a_{M+N}$  des nombres complexes arbitraires. Posons

$$S(\alpha) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(n\alpha).$$

Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_R$  des nombres réels distincts modulo 1 et posons

$$\delta = \min_{\substack{r, s, n \in \mathbf{Z} \\ r \neq s}} |\alpha_r - \alpha_s - n|.$$

Une inégalité de grand crible est du type

$$(A) \quad \sum_r |S(\alpha_r)|^2 \leq C(N, \delta) \sum_n |a_n|^2$$

(vérifiée pour  $(a_n)$  et  $(\alpha_r)$  arbitraires).

Si  $R = 1$ , on trouve  $|S(\alpha_1)|^2 \leq N \cdot \sum |a_n|^2$  (inégalité de Schwarz) et si  $N = 1$ ,  $\sum_r |S(\alpha_r)|^2 = R \cdot |a_{M+1}|^2 \leq \delta^{-1} |a_{M+1}|^2$ .

On a trouvé diverses expressions de  $C(N, \delta)$  [4] mais il est surprenant qu'on ait pu réunir les deux inégalités précédentes et montrer que  $C(N, \delta) = N + \delta^{-1} - 1$  satisfait (A) [5]. Cette expression est la meilleure possible au sens suivant: pour  $R$  donné, on peut toujours obtenir l'égalité dans (A) [5]. On peut obtenir une forme un peu plus sophistiquée que (1):

Si  $\delta_r = \min_{s \neq r, n \in \mathbf{Z}} |\alpha_r - \alpha_s - n|$ , alors Montgomery-Vaughan [6] [7] ont montré que

$$(B) \quad \sum_{r=1}^R |S(\alpha_r)|^2 (N + C\delta_r^{-1})^{-1} \leq \Sigma |a_n|^2$$

avec  $C = \frac{3}{2}$ , inégalité dont ils donnent des applications arithmétiques.

### LES INÉGALITÉS DE HILBERT-MONTGOMERY-VAUGHAN

L'inégalité (A) équivaut à dire que la norme de la matrice  $R \times N$  ( $e(n\alpha_r)$ ) est inférieure ou égale à  $\sqrt{C(N, \delta)}$ . La matrice transposée ayant la même norme, on est conduit [6] à s'intéresser à la majoration de la norme d'une matrice du type  $(\sin^{-1}\pi(\alpha_r - \alpha_s))'$  (le prime signifiant que les termes de la grande diagonale sont nuls). Cette majoration se ramène à celle de la norme d'une matrice du type  $((x_r - x_s)^{-1})'$  [5]. C'est pourquoi Montgomery et Vaughan [7] ont démontré:

Soit  $x_1, x_2, \dots, x_r$  des nombres réels distincts,

$$\delta = \underset{\substack{r, s \\ r \neq s}}{\text{Min}} |x_r - x_s|, \quad \delta_r = \underset{s \neq r}{\text{Min}} |x_r - x_s|$$

alors quels que soient les nombres complexes  $u_1, u_2, \dots, u_R$

$$(C) \quad \left| \sum_{\substack{r, s \\ r \neq s}} \frac{\bar{u}_r u_s}{x_r - x_s} \right| \leq \pi \delta^{-1} \Sigma |u_r|,$$

$$(D) \quad \left| \sum_{\substack{r, s \\ r \neq s}} \frac{\bar{u}_r u_s}{x_r - x_s} \right| \leq \pi C \cdot \Sigma |u_r|^2 \delta_r^{-1},$$

avec  $C = \frac{3}{2}$ .

De (C) on déduit (A) avec  $C(N, \delta) = N + \delta^{-1}$ , et de (D) on déduit (B).  
 Une conjecture vraisemblable est qu'on peut donner à  $C$  la valeur 1 dans (D).  
 Dans ce sens, j'ai montré le résultat suivant:

**THÉORÈME.** (D) reste vraie pour  $C = \frac{4}{3}$ .

*Notation:* Tout au long de la démonstration  $\delta_r = \underset{s \neq r}{\text{Min}} |x_r - x_s|$ .

**LEMME 1.** Soit  $(x_r)_0^\infty$  une suite réelle strictement croissante telle que  $x_0 = 0$ ;  $f$  une fonction de  $]0, +\infty[$  dans  $\mathbf{R}$ , intégrable à l'infini, trois fois dérivable et vérifiant  $f'(x) < 0, f''(x) > 0, f'''(x) < 0$  pour tout  $x$ . Alors