

## 3.3. Notes

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1982)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Thus  $c_{\xi, \lambda, m, n}$  has block matrix

$$\begin{array}{ccc}
 n \leq -\lambda - \frac{1}{2} & -\lambda + \frac{1}{2} \leq n \leq \lambda - \frac{1}{2} & n \geq \lambda + \frac{1}{2} \\
 \begin{array}{l} m \leq -\lambda - \frac{1}{2} \\ -\lambda + \frac{1}{2} \leq m \leq \lambda - \frac{1}{2} \\ m \geq \lambda + \frac{1}{2} \end{array} & \left( \begin{array}{ccc} * & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & * \end{array} \right) & 
 \end{array}$$

where each starred block has all entries nonzero.

(d)  $c_{\xi, \lambda, m, n} \neq 0 \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{2} \leq m \leq -\lambda - \frac{1}{2}$  or  $m, n \leq \lambda - \frac{1}{2}$   
 or  $m, n > -\lambda + \frac{1}{2}$ . □

The finite-dimensional representation occurring in the above classification are the representations  $\pi_{\xi, \lambda}^0(\lambda + \xi \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}, \lambda \neq 0)$ .

### 3.3. NOTES

3.3.1. In the case of the unitary principal series ( $\lambda$  imaginary), Theorem 3.4 was first proved by BARGMANN [2, sections 6 and 7]. See van DIJK [9, Theorem 4.1] for the statement and (infinitesimal) proof of our Theorem 3.4 in the general case. A proof of Theorem 3.4 similar to our proof was earlier given by BARUT & PHILLIPS [3, §II (4)].

3.3.2. Theorem 3.4 in the case of imaginary and nonzero  $\lambda$  is contained in a general theorem by BRUHAT [5, Theorem 7; 2]: For  $\xi \in \hat{M}$ ,  $\lambda \in ia$ , the principal series representation  $\pi_{\xi, \lambda}$  of  $G$  (cf. (2.2)) is irreducible if  $s \cdot \lambda \neq \lambda$  for all  $s \neq e$  in the Weyl group for  $(G, K)$ .

3.3.3. GELFAND & NAIMARK [18, §5.4, Theorem 1] proved the irreducibility of the unitary principal series for  $SL(2, \mathbf{C})$  by a global method different from ours, working in a noncompact realization and calculating the “matrix elements” of the representation with respect to a (continuous)  $\overline{N}$ -basis.

3.3.4. Analogues of Theorems 3.2 and 3.3 can be formulated in the case of non-abelian  $K$ , cf. [27, Theorem 3.3]. In that case the canonical matrix elements  $\tau_{\gamma, \delta}$  are matrix-valued functions. By using this method, NAIMARK [34, Ch. 3, §9, No. 15] examined the irreducibility of the nonunitary principal series for  $SL(2, \mathbf{C})$ , see also KOSTERS [28].

3.3.5. Further applications of the irreducibility criterium in Theorem 3.2 can be found in MILLER [32, Lemmas 3.2 and 4.5] for the Euclidean motion group of  $\mathbf{R}^2$  and for the harmonic oscillator group, TAKAHASHI [39, §3.4] for the discrete series of  $SL(2, \mathbf{R})$  and [41, p. 560, Cor. 2] for the spherical principal series of  $F_{4(-20)}$ .

3.3.6. The method of this section does not show in an *a priori* way that a  $K$ -multiplicity free principal series representation has only finitely many irreducible subquotient representations. Actually, this property holds quite generally, cf. WALLACH [45, Theorem 8.13.3].

#### 4. EQUIVALENCES BETWEEN IRREDUCIBLE SUBQUOTIENT REPRESENTATIONS OF THE PRINCIPAL SERIES

##### 4.1. NAIMARK EQUIVALENCE

In this subsection we derive a criterium (Theorem 4.5) for Naimark equivalence of  $K$ -multiplicity free representations. Lemmas 4.3 and 4.4 are preparations for its proof.

Let  $G$  be an lcsc. group.

*Definition 4.1.* Let  $\sigma$  and  $\tau$  be Hilbert representations of  $G$ . The representation  $\sigma$  is called *Naimark related* to  $\tau$  if there is a closed (possibly unbounded) injective linear operator  $A$  from  $\mathcal{H}(\sigma)$  to  $\mathcal{H}(\tau)$  with domain  $\mathcal{D}(A)$  dense in  $\mathcal{H}(\sigma)$  and range  $\mathcal{R}(A)$  dense in  $\mathcal{H}(\tau)$  such that  $\mathcal{D}(A)$  is  $\sigma$ -invariant and  $A\sigma(g)v = \tau(g)Av$  for all  $v \in \mathcal{D}(A)$ ,  $g \in G$ . Then we use the notation  $\sigma \stackrel{A}{\simeq} \tau$  or  $\sigma \simeq \tau$ .

Naimark relatedness is not necessarily a transitive relation (cf. WARNER [48, p. 242]). However, we will see that it becomes an equivalence relation (called *Naimark equivalence*) when restricted to the class of unitary representations or of  $K$ -multiplicity free representations,  $K$  abelian.

Two unitary representations  $\sigma$  and  $\tau$  of  $G$  are called *unitarily equivalent* if there is an isometry  $A$  from  $\mathcal{H}(\sigma)$  onto  $\mathcal{H}(\tau)$  such that  $A\sigma(g)v = \tau(g)Av$  for all  $v \in \mathcal{H}(\sigma)$ ,  $g \in G$ . Clearly unitary equivalence is an equivalence relation.