3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME A (CAS DIFFÉRENTIABLE)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1982)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

(qui appartient à ce plan homogène) doit être parallèle à la tangente à $\mathfrak{C}$ en x_φ. Le champ continu de droites

$$\varphi \mapsto x_\varphi + P(d_\varphi)$$

est défini sur toute la courbe $\mathfrak{C}$ et fournit la tangente t_φ à $\mathfrak{C}$ en x_φ chaque fois que ce point est dérivable sur $\mathfrak{C}$, c'est-à-dire sauf en un ensemble au plus dénombrable de points. Il ne reste plus qu'à démontrer le lemme suivant (formulé avec des notations légèrement différents et plus usuelles).

LEMME. *Soient* I *un intervalle (d'intérieur non vide dans* $\mathbf{R}$*) et* f *une fonction continue* $I \to \mathbf{R}$. *Supposons* f *dérivable en tous les points de* $I - D$ *où* D *est une partie au plus dénombrable de* I. *S'il existe une fonction continue* $g : I \to \mathbf{R}$ *telle que* $g(x) = f'(x)$ *en tout* $x \in I - D$, *alors* f *est continûment dérivable sur tout* I *et* $f' = g$.

La démonstration de ce lemme est facile! Appelons h la primitive de g nulle en $x = a$

$$h(x) = \int_a^x g(t)dt \, .$$

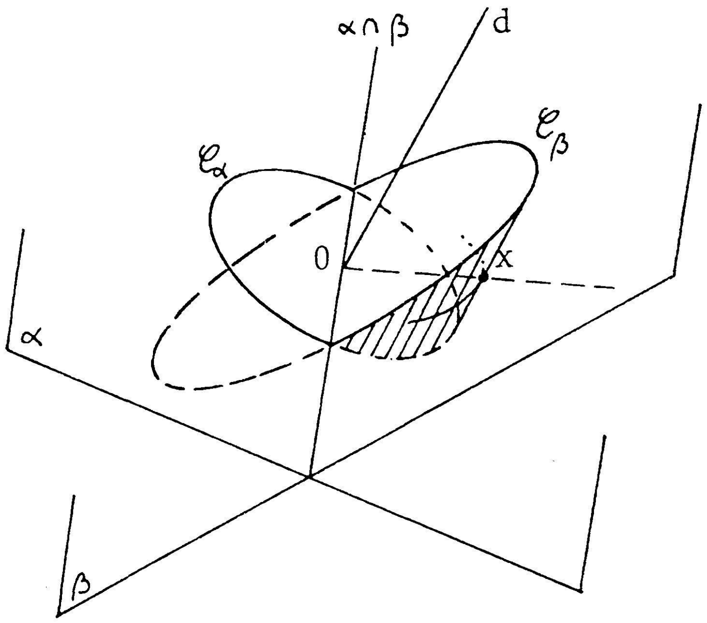
Par définition h est continûment dérivable avec $h' = g$. Par hypothèse, $f - h$ est dérivable en tout $x \in I - D$ et de dérivée nulle en ces points. Comme cette fonction $f - h$ est continue, le théorème des accroissements finis montre qu'elle est constante: $f = h + c$ est continûment dérivable et $f' = h' = g$.

3. Démonstration du théorème A (cas différentiable)

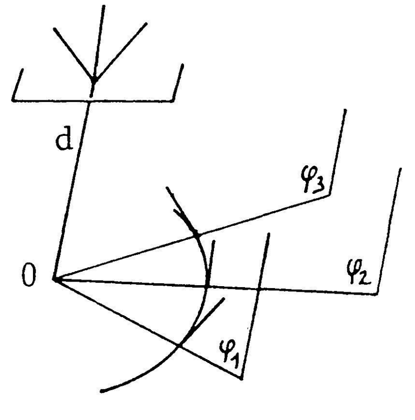
Nous avons vu (point 4, sec. 2) que sous les hypothèses du théorème A, il y a un unique projecteur P_α de norme 1 sur chaque plan homogène α. Montrons maintenant que

$$\alpha \mapsto \operatorname{Ker}(P_\alpha) = d_\alpha$$

est *injective*: à deux plans (homogènes) distincts correspondent des directions de projection de norme 1 *distinctes*. En effet, prenons deux plans homogènes $\alpha \neq \beta$. Si les projecteurs P_α et P_β avaient même noyau d, la surface $S = \operatorname{Fr}(K)$ contiendrait une portion de cylindre de génératrices parallèles à d, limitée par α et β. Considérons alors une section *intermédiaire* $\mathfrak{C}_\gamma = S \cap \gamma$ (γ est un plan homogène contenant la droite $\alpha \cap \beta$ et situé entre α et β relativement à d). D'après le théorème de Krein-Milman, on peut choisir un point x de $\mathfrak{C}_\gamma$ extrêmal sur $K \cap \gamma$ et non situé sur la droite $\alpha \cap \beta$ (il pourrait arriver que les seuls points ayant les propriétés indiquées soient x et $-x$: ce cas se présenterait si $K \cap \gamma$ était un parallélogramme avec deux sommets sur $\alpha \cap \beta$! On comparera d'ailleurs cette situation avec sa duale du point 4, sec. 2). Ainsi, x est intérieur à un segment de S parallèle à d, tout en étant extrêmal sur toutes les sections planes de K définies par des plans homogènes γ' contenant $0x$ et distinctes du plan engendré par d et $0x$. Les projecteurs de norme 1 sur ces plans γ' devraient avoir d comme noyau, contrairement au fait que l'ensemble des projecteurs correspondant au faisceau de plans d'axe $0x$ est compact.



L'application bijective $\alpha \mapsto d_\alpha = \mathrm{Ker}(P_\alpha)$ transforme plans coaxiaux en droites coplanaires. En effet, les droites d_i correspondant à un système de plans ϕ_i contenant une droite commune d (homogène) doivent être parallèles aux plans tangents en les deux points symétriques de $S \cap d$. En d'autres termes, l'application considérée transforme droites de $\mathbf{P}^*$ en droites de $\mathbf{P}$. Le théorème fondamental de la géométrie projective affirme alors qu'il existe une application linéaire bijective de $\mathbf{R}_3 = (\mathbf{R}^3)^*$ dans $\mathbf{R}^3$ qui induit $\alpha \mapsto d_\alpha$ au niveau des espaces projectifs (puisque le corps $\mathbf{R}$ n'a aucun automorphisme non trivial, il n'y a pas à utiliser le résultat de continuité ici).



En particulier, si on fixe une section plane $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_\alpha$ de S, il existe une application linéaire A bijective $\alpha \to \alpha$ telle que $A(0x_\varphi) = d_\varphi$ (d_φ étant la droite homogène parallèle à la tangente t_φ à $\mathfrak{C}$ en x_φ : les notations sont celles du point 6 de la sec. 1). Dans le plan α, et en coordonnées polaires d'angle φ en 0, la courbe $\mathfrak{C}$ est ainsi une solution (stricte puisque continûment dérivable) d'une équation différentielle vectorielle du type

$$\frac{d}{d\varphi}\vec{x} = A\vec{x} \qquad (\vec{x} = 0x \in \alpha)\,.$$

Comme cette solution $\mathfrak{C}$ est fermée, la discussion de ces systèmes autonomes en dimension 2 montre que les valeurs propres de A doivent être imaginaires pures (conjuguées) et $\mathfrak{C}$ est une ellipse!

Globalement, prenant un système d'axes $0xyz$, les trois sections de S par les plans de coordonnées doivent être des ellipses et S est engendrée par une famille d'ellipses (verticales pour fixer les idées) s'appuyant sur une ellipse de base fixe. C'est un ellipsoïde.