

## 7. Proof of (5)

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Since  $\chi_1\chi_2\chi_3\phi$  and  $\chi_3\phi$  are nontrivial, (19) now follows from (18) and (27).

*Remark.* We evaluated  $S$  (the left side of (4)) only under the assumption that  $\chi_1\chi_2\chi_3^2$  and  $(\chi_1\chi_2\chi_3)^2$  were nontrivial. We now indicate how  $S$  can be simply evaluated in terms of Gauss sums when this assumption is dropped. If  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ , or  $\chi_3^2$  is trivial, one can easily evaluate  $S$  directly from its definition. If  $\chi_1\chi_2\chi_3^2$  is trivial, then one can evaluate  $S_1$  (and hence  $S$ ) from (20), by first replacing  $u$  by  $u^{-1}$ , then replacing  $v$  by  $vu^{-1}$ , to obtain

$$S_1 = \sum_{u,v} \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_2 \bar{\chi}_3^2(u) \chi_3(1+u^2+v^2-2u-2v-2uv) \chi_2(v).$$

Finally, suppose that  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi_3^2$ , and  $\chi_1\chi_2\chi_3^2$  are nontrivial. Then  $S_1$  can be evaluated from (27).

## 7. PROOF OF (5)

Let  $E$  denote the left side of (5). Since  $\chi_1\chi_2$  is nontrivial,

$$E + 1 + \chi_1\chi_2(-1) = \sum_{\substack{x,y \neq 0 \\ x+y \neq -1}} \chi_1\chi_3\left(\frac{1+x}{y}\right) \chi_2\chi_3\left(\frac{1+y}{x}\right) \chi_1\chi_2(y-x).$$

Set  $t = \frac{1+x}{y}$ ,  $u = \frac{1+y}{x}$ , so

$$x = \frac{t+1}{ut-1}, \quad y = \frac{u+1}{ut-1}.$$

Then

$$\begin{aligned} E + 1 + \chi_1\chi_2(-1) &= \sum_{\substack{u,t \neq -1 \\ ut \neq 1}} \chi_1\chi_3(t) \chi_2\chi_3(u) \chi_1\chi_2\left(\frac{t-u}{1-ut}\right) \\ &= \sum_{u,t \neq -1} \chi_1\chi_3(t) \chi_2\chi_3(u) \chi_1\chi_2(t-u) \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_2(1-ut). \end{aligned}$$

Since  $\chi_1\chi_3$  and  $\chi_2\chi_3$  are nontrivial,

$$E = \sum_{u,t \neq 0} \chi_1\chi_3(t) \chi_2\chi_3(u) \chi_1\chi_2(t-u) \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_2(1-ut).$$

Replace  $t$  by  $t/u$  to obtain

$$\begin{aligned} E &= \sum_{u,t \neq 0} \chi_1\chi_3\left(\frac{t}{u}\right) \bar{\chi}_1^2(u) \chi_1\chi_2(t-u^2) \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_2(1-t) \\ &= \sum_{u,t \neq 0} \chi_1\chi_3(t) \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_2(1-t) \bar{\chi}_1(u) \chi_1\chi_2(t-u) \{1 + \phi(u)\}. \end{aligned}$$

Now replace  $u$  by  $tu$  to get

$$(28) \quad E = \sum_{u,t} \chi_1 \chi_2 \chi_3 (t) \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_2 (1-t) \bar{\chi}_1 (u) \chi_1 \chi_2 (1-u) \{1 + \phi (ut)\} \\ = J (\chi_1 \chi_2 \chi_3, \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_2) J (\bar{\chi}_1, \chi_1 \chi_2) + J (\chi_1 \chi_2 \chi_3 \phi, \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_2) J (\bar{\chi}_1 \phi, \chi_1 \chi_2),$$

where the Jacobi sums  $J$  are defined above (18). Since  $\chi_1^2, \chi_2^2, \chi_3^2$ , and  $\chi_1 \chi_2$  are nontrivial, (5) now follows from (18).

*Remark.* If  $\chi_1 \chi_2, \chi_1 \chi_3$ , or  $\chi_2 \chi_3$  is trivial, we can easily evaluate  $E$  directly from its definition. Otherwise,  $E$  can be evaluated simply from (28).

8. CHARACTER SUM ANALOGUES OF (1), (1a) AND (1b)

Let  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \phi$  be characters on  $GF(q)$ , where  $\phi$  has order 2,  $p > 2$ . Set  $t_0 = 1$ . The discriminant of the polynomial

$$F(y) = \sum_{i=0}^n t_i y^{n-i}$$

is a polynomial in  $t_1, \dots, t_n$  which shall be denoted by  $D_n$ . Write

$$E_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i t_i.$$

We conjecture that the following analogues of (1), (1a), (1b) hold for each  $n \geq 1$ :

$$(29) \quad \sum_{t_1, \dots, t_n \in GF(q)} \chi_1 (t_n) \chi_2 (E_n) \chi_3 \phi (D_n) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{-G(\chi_3^{j+1}) G(\chi_1 \chi_3^j) G(\chi_2 \chi_3^j)}{G(\chi_3) G(\chi_1 \chi_2 \chi_3^{n+j-1})},$$

provided that the  $n$  characters  $\chi_1 \chi_2 \chi_3^{n+j-1}$  ( $0 \leq j \leq n-1$ ) are all nontrivial;

$$(29a) \quad \sum_{t_1, \dots, t_n \in GF(q)} \chi_1 (t_n) \chi_3 \phi (D_n) \zeta^{T(t_1)} = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{-G(\chi_3^{j+1}) G(\chi_1 \chi_3^j)}{G(\chi_3)}$$

for all  $\chi_1, \chi_3$ ; and

$$(29b) \quad \sum_{t_1, \dots, t_n \in GF(q)} \chi_3 \phi (D_n) \zeta^{\frac{p+1}{2} T(t_1^2 - 2t_2)} = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{-\phi(2) G(\phi) G(\chi_3^{j+1})}{G(\chi_3)}$$

for all  $\chi_3$ .

Formulas (29), (29a), and (29b) have been verified by computer for some small primes  $q$  with  $n = 3, 4$ . Of course the formulas are well known for  $n = 1$ . For